Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: magisterský pro 2. stupeň ZŠ

Studijní obor (kombinace): matematika – fyzika

MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ
LOCI OF POINTS

Diplomová práce: 10-FP-KMD-002

Autor:

Monika SKÁKALÍKOVÁ

Adresa:

Konopná 635/V
460 14, Liberec XIV – Ruprechtice

Podpis:

……………………………………

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
101	0	89	1	9	0

V Liberci dne: 3. 11. 2009

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

V Liberci dne: 3. 11. 2009 Monika Skákalíková

MNOŽINY BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ

SKÁKALÍKOVÁ Monika **DP** – 2010
Vedoucí DP: prof. RNDr. Jana Přívratská, Csc. Ph.D.

Anotace

Diplomová práce se zabývá množinami bodů daných vlastností v rovině a v prostoru. Tvrzení o existenci těchto množin dokazujeme užitím souřadnic (analytickou metodou). Cílem diplomové práce pak bylo vytvořit sbírku konstrukčních úloh, při jejichž řešení se využívá těchto vlastností množin. Úlohy nejsou řešeny pouze syntetickou metodou, ale i analytickou, která bývá mnohdy jednodušší a schůdnější.

Tato práce by měla sloužit jako studijní text pro studenty středních škol (speciální semináře) či pro studenty specializující se na matematiku, která základní učivo rozšiřuje.

Klíčová slova: množina bodů daných vlastností, konstrukční úloha, analytické řešení úlohy, syntetické řešení úlohy.

LOCI OF POINTS

Annotation

The Diploma Thesis deals with the loci of points (sets of points having given properties) in plane and in space. The statements about existence of these sets we prove by analytic method. The aim of the diploma thesis was to create a collection of constructional problems, which are solved using of loci of points. The problems are solved not only by synthetic method, but also by analytic method, which is often easier and more practicable.

This diploma thesis should be useful as a study text for secondary school students (special workshops) or for students who specialize in mathematics, which extend the subject matter.

Key words: the loci of points, the constructional problem, the analytic solution of the problem, the synthetic solution of the problem.

MENGEN VON PUNKTEN

Die Annotation

Die Diplomarbeit befasst sich Mengen von Punkten mit der Eigenschaft in Gerade und im Raum. Die Behauptung (Theorie) über Existenz dieser Mengen beweisen wir durch den Gebrauch von Koordinaten (Analytische Methode). Ziel der Diplomarbeit war dann bildung einer Sammlung von Konstruktionsaufgaben bei deren Lösung Eigenschaften der Mengen genuzt werden. Die Aufgaben werden nicht nur durch Synthetische sondern auch Analytische Methode gelöst welche dann oft einfacher und gängiger ist.

Diese Arbeit sollte als Studium Text für Studenten von Mittelschulen (Spezielle Seminare) dienen so wie auch für Studenten spezialisiert auf Mathematik die den Grundstoff erweitert.

Die Schlüsselwörter: die Mengen von Punkten, die Konstruktionsaufgaben, die analytische Lösung der Aufgabe, die synthetische Lösung der Aufgabe.

OBSAH

1. ÚVOD 7
2. MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÉ VLASTNOSTI V ROVINĚ 8
3. MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÉ VLASTNOSTI V PROSTORU 26
4. ŘEŠENÍ KONSTRUKČNÍCH ÚLOH 37
   4.1. Řešení konstrukčních úloh užitím množin všech bodů dané vlastnosti 37
   4.2. Polohové a nepolohové konstrukční úlohy 37
   4.3. Postup řešení konstrukčních úloh syntetickou metodou 37
   4.4. Řešení konstrukčních úloh analytickou metodou 38
5. SBÍRKA KONSTRUKČNÍCH ÚLOH 39
6. ZÁVĚR 100
7. POUŽITÁ LITERATURA 101

SEZNAM POUŽÍVANÝCH SYMBOLŮ

A, B, …	bod A, B, …
a, b, …	přímka a, b, …
$\leftrightarrow AB$	přímka AB (přímka určená body A, B)
$\rightarrow AB$	polopřímka AB (polopřímka s počátkem A a vnitřním bodem B)
AB	úsečka AB (úsečka s krajními body A, B)
$\angle AVB$	konvexní úhel AVB (konvexní úhel s vrcholem V a rameny v polopřímkách VA, VB)
(a, b)	rovinný pás a, b (pás ohraničený rovnoběžkami a, b)
ΔABC	trojúhelník ABC (trojúhelník s vrcholy A, B, C)
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška ke straně a trojúhelníku
r	poloměr kružnice
$k(S; r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$A \in p$ ($A \notin p$)	bod A leží (neleží) na přímce p
$A = B$ ($A \neq B$)	bod A splývá, resp. je totožný s bodem B (různý od bodu B)
$a = b$ ($a \neq b$)	přímka a splývá, resp. je totožná s přímkou b (různá od přímky b)
$a \parallel b$ ($a \nparallel b$)	přímka a je (není) rovnoběžná s přímkou b
$a \cap b = \{P\}$	průsečík P přímek a, b
$a \perp b$	přímka a je kolmá k přímce b
$\Delta ABC \cong \Delta KLM$	trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem KLM
$\lvert AB\rvert$	délka úsečky AB (vzdálenost bodů A, B)
$\lvert Ap\rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p
$\lvert ab\rvert$	vzdálenost rovnoběžných přímek a, b
$\circ$	stupeň
R	množina všech reálných čísel
$\vec{u}$	vektor
$\lvert\angle AVB\rvert$	velikost konvexního úhlu AVB
α, β, …	rovina α, β, …
$A[x, y]$	bod A o souřadnicích a_1, a_2 (v rovině)
$B[x, y, z]$	bod B o souřadnicích b_1, b_2, b_3 (v prostoru)
$\vec{u} = (u_1, u_2)$	vektor $\vec{u}$ o souřadnicích u_1, u_2
$\lvert\vec{u}\rvert$	velikost vektoru $\vec{u}$
p: $ax + by + c = 0$	přímka p daná rovnicí $ax + by + c = 0$
α: $ax + by + cz + d = 0$	rovina α daná rovnicí $ax + by + cz + d = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$
$\alpha \parallel \beta$ ($\alpha \nparallel \beta$)	rovina α je (není) rovnoběžná s rovinou β
$\alpha \perp \beta$	rovina α je kolmá k rovině β

1. ÚVOD

„Ptej se na to, co nevíš, ale neříkej všechno, co víš.“

Démokritos z Abdér

Milí čtenáři,

v této diplomové práci se hlouběji seznámíte s množinami bodů daných vlastností, které jsou probírány na střední škole především v planimetrii, kde se odvozují použitím shodných či podobných zobrazení. Ovšem analytická geometrie nabízí další možnosti hledání množin bodů daných vlastností, neboť je pěknou ukázkou spojení algebry a geometrie.

Na začátku dokazujeme užitím souřadnic tvrzení o uváděných množinách, tzn., že si zvolíme soustavu souřadnic vhodným způsobem vzhledem k daným geometrickým útvarům. Tím dokážeme, že každý bod útvaru má danou vlastnost. Pro lepší názornost je každá situace ještě doplněna obrázkem. Abychom mohli prohlásit, že jde o množinu všech bodů dané vlastnosti, měli bychom ještě ověřit druhou podmínku, a to, že žádný bod, který není bodem útvaru, nemá předepsanou vlastnost. Tento analytický důkaz již ale přenecháme na čtenáři.

Podstatnou částí této diplomové práce je sbírka konstrukčních úloh, při jejichž řešení se vlastností množin využívá. Především se jedná o řešení Apolloniových a Pappových úloh, polohových a nepolohových úloh trojúhelníků a čtyřúhelníků. Apolloniova úloha je hledání kružnice, která má tři vlastnosti: prochází bodem (B), dotýká se přímky (p), dotýká se kružnice (k). Kombinací těchto třech možností dostáváme deset druhů Apolloniových úloh, ale ne všechny mohou být řešeny pomocí množin bodů. Pappova úloha je pak speciálním případem Apolloniovy úlohy. Jak postupovat při řešení konstrukční úlohy, jaké má části či jaký rozdíl je mezi polohovou a nepolohovou úlohou, se dozvíte ve čtvrté kapitole.

Některé úlohy ve sbírce jsou řešeny nejen syntetickou metodou, ale i analytickou, která v některých případech bývá schůdnější a někdy nám může pomoci nalézt cestu konstrukčního řešení. Ale někde by bylo analytické řešení velmi složité a zdlouhavé, tak ho ani neuvádíme, a řešíme pouze narýsováním.

Jednotlivé kroky v postupech každé úlohy jsou popsány velmi podrobně, proto by tato práce měla sloužit jako příručka, nebo studijní text pro studenty, kteří mají rádi matematiku a geometrii obzvlášť, neboť geometrie je předmět vyžadující vysokou míru představivosti studentů, a ne každý potřebnou představivost má. Tato práce základní učivo rozšiřuje, proto se od čtenáře předpokládá znalost základních konstrukcí, geometrických vět a analytické geometrie.

2. MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÉ VLASTNOSTI V ROVINĚ

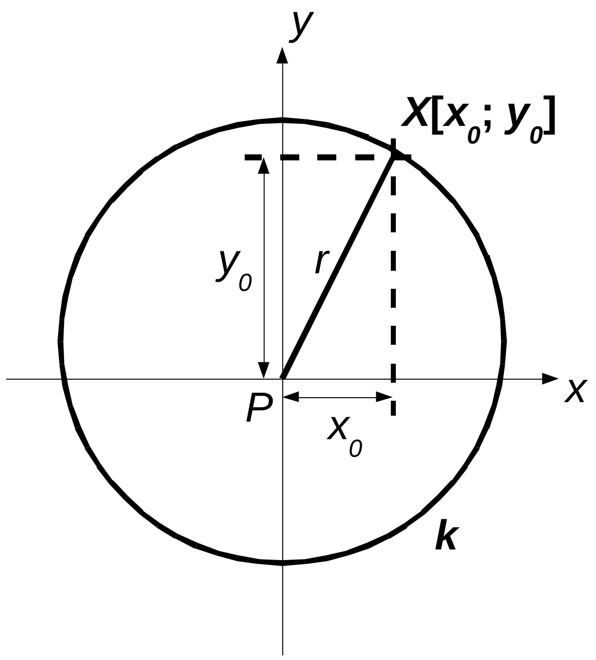
Geometrické místo bodu dané vlastnosti je již zastaralý název pro množinu bodů dané vlastnosti. Množinou M všech bodů dané vlastnosti V nazýváme takový geometrický útvar G, jehož body splňují tyto dvě podmínky:

a) Každý bod útvaru G má danou vlastnost V (žádný bod, který nemá předepsanou vlastnost, není bodem útvaru).
b) Každý bod, který má danou vlastnost V, je bodem útvaru G (žádný bod, který není bodem útvaru G, nemá předepsanou vlastnost).

Uvedené dva požadavky vyjadřují rovnost množin: množiny M bodů dané vlastnosti a množiny bodů útvaru G. Důkazem rovnosti M = G prokazujeme, že jde o množinu všech bodů dané vlastnosti.

V následujícím přehledu uvádíme nejdůležitější množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině, které jsou velmi využívány při řešení planimetrických konstrukčních úloh. Důkazy tvrzení o uváděných množinách všech bodů nacházíme analytickou metodou.

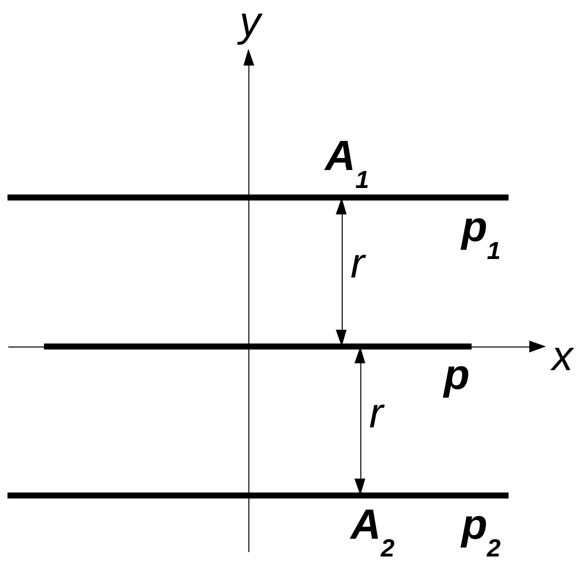
1) **Množina všech bodů, která má od daného bodu *S* danou vzdálenost *r*, je kružnice *k*(*S; r*). Tato kružnice je také množinou všech středů kružnic, jež mají daný poloměr *r* a procházejí daným bodem *S*.**



Obrázek 1: Důkaz v rovině - úloha 1

Z Pythagorovy věty platí, že $r^2 = x_0^2 + y_0^2$, což je rovnice kružnice, jejíž střed je v počátku soustavy souřadnic.

2) **Množiny všech bodů, které mají od dané přímky *p* danou vzdálenost *r*, jsou dvě přímky p_1, p_2 rovnoběžné s přímkou *p* a ležící v opačných polorovinách vyťatých přímkou *p* ve vzdálenosti *r* od ní. Tyto dvě rovnoběžky $p_1 \parallel p_2 \parallel p$ jsou také množinou všech středů kružnic, jež mají daný poloměr *r* a dotýkají se dané přímky *p*.**



Obrázek 2: Důkaz v rovině - úloha 2

Nechť je přímka *p* zadána obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$ a bod A, který má souřadnice $A[x_0;\ y_0]$. Víme, že vzdálenost bodu *A* od přímky *p* je *r*. Pak tedy platí, že $d(Ap) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$. Tuto rovnici upravme:

$$r \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = |ax_0 + by_0 + c|$$

$$ax_0 + by_0 + c = \pm r \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$$

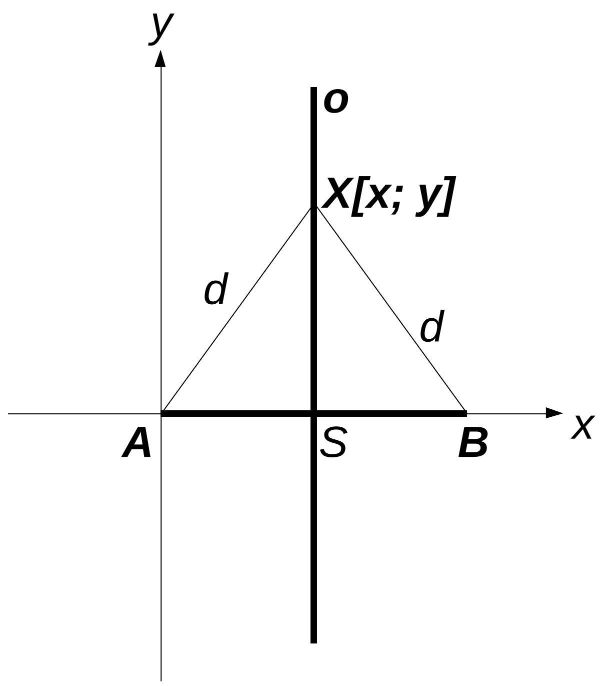
a) $ax_0 + by_0 + c = r \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

b) $ax_0 + by_0 + c = -r \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

V soustavě souřadnic si zvolíme přímku *p* tak, že je totožná s osou *x* a její rovnice je tedy p: $y = 0$. Můžeme tedy psát, že $a = 0$, $b = 1$, a dosadíme do získaných rovnic. Dostáváme $y_0 = \pm r$. Tím jsme dostali *y*-ovou souřadnici bodu *A*. Zbývá tedy získat jeho *x*-ovou souřadnici.

Pokud ovšem je $a = 0$, pak za x_0 můžeme dosadit libovolné číslo, tedy $x_0 = t$, kde *t* je parametr ($t \in R$). Máme tedy dva body *A*: $A_1[t;\ r]$, $A_2[t;\ -r]$. Bod *A* se tedy pohybuje po přímce, jehož *y*-ová souřadnice se nemění. Pak taková přímka má rovnici p_1: $y = r$, p_2: $y = -r$.

3) Množina všech bodů, která má stejnou vzdálenost od dvou daných bodů *A, B* (*A* ≠ *B*), je osa úsečky *AB*, která je kolmá k úsečce *AB* a prochází jejím středem *S*. Tato osa úsečky je také množinou všech středů kružnic, jež procházejí dvěma danými body *A, B*.



Obrázek 3: Důkaz v rovině - úloha 3

Víme, že vzdálenost *d* od bodu *A* k bodu *X* musí být stejná jako vzdálenost *d* od bodu *B* k bodu *X*. Nechť tedy platí, že |*AX*| = |*BX*| = *d*, tedy *d*(*AX*) = *d*(*BX*). Body *A, B* mají tedy souřadnice $A[x_a; y_a]$, $B[x_b; y_b]$. Pak:

$$\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}=\sqrt{(x-x_b)^2+(y-y_b)^2}\ .$$

Tuto danou rovnici upravíme pro neznámé *x*, *y*.

$$(x-x_a)^2+(y-y_a)^2=(x-x_b)^2+(y-y_b)^2$$

$$x^2-2xx_a+x_a{}^2+y^2-2yy_a+y_a{}^2=x^2-2xx_b+x_b{}^2+y^2-2yy_b+y_b{}^2$$

$$-2xx_a+x_a{}^2-2yy_a+y_a{}^2=-2xx_b+x_b{}^2-2yy_b+y_b{}^2$$

$$-2xx_a+2xx_b=-x_a{}^2+2yy_a-y_a{}^2+x_b{}^2-2yy_b+y_b{}^2$$

$$2x\cdot(x_b-x_a)=-x_a{}^2+2yy_a-y_a{}^2+x_b{}^2-2yy_b+y_b{}^2$$

$$x=\frac{-x_a{}^2+2yy_a-y_a{}^2+x_b{}^2-2yy_b+y_b{}^2}{2\cdot(x_b-x_a)}$$

Podle souřadnicového systému jsme zvolili bod *A* do počátku, tedy *A*[0; 0], bod *B*[*b*; 0]. Za *y*-ovou souřadnici bodu *X* zvolme např. speciálně *y* = 0. Pak vypočteme *x*-ovou souřadnici ze získané rovnice.

$$x = \frac{-0^2 + 2\cdot 0\cdot 0 - 0^2 + b^2 - 2\cdot 0\cdot 0 + 0^2}{2\cdot (b-0)} = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}$$

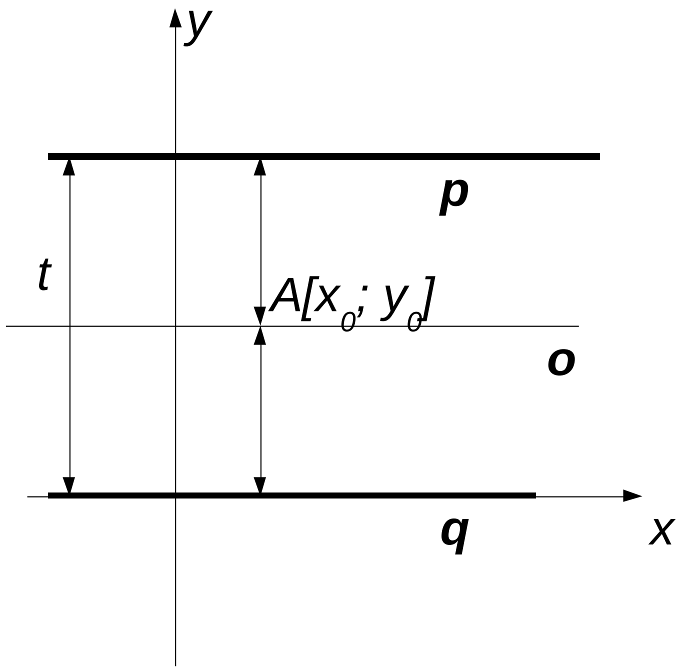
Bod X má tedy souřadnice $X\left[\frac{b}{2};0\right]$, což odpovídá bodu S, který je středem úsečky AB.

Nechť za y-ovou souřadnici bodu X zvolíme libovolné číslo, tedy parametr t ($t \in R$). Pak za x-ovou souřadnici dostáváme

$$x = \frac{-0^2 + 2\cdot t\cdot 0 - 0^2 + b^2 - 2\cdot t\cdot 0 + 0^2}{2\cdot (b-0)} = \frac{b^2}{2b} = \frac{b}{2}.$$

Pak další bod X má souřadnice $X\left[\frac{b}{2};t\right]$. Je tedy jasné, že x-ová souřadnice bodů X se nemění. Tyto body se pohybují po přímce, která má rovnici o: $x = \frac{b}{2}$, a danou přímku nazveme osou úsečky AB, která je kolmá na úsečku AB a prochází středem S úsečky AB.

4) **Množina všech bodů, která má stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých rovnoběžek p, q ($p \neq q$), je osa pásu jimi omezeného. Tato osa pásu je také množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných rovnoběžek p, q. Jejich poloměr je zřejmě roven polovině vzdálenosti těch rovnoběžek.**



Obrázek 4: Důkaz v rovině - úloha 4

Nechť přímky p, q mají rovnice p: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, q: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Přímky p, q jsou rovnoběžné. Pro bod $A[x_0; y_0]$ tedy musí platit, že je stejně vzdálený od přímky p, tak od přímky q.

$$d(Ap) = d(Aq)$$

$$\frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}} = \frac{|a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2|}{\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$$

Z obrázku můžeme určit rovnice přímek *p, q*, kde *q*: $y = 0$ a *p*: $y = t$, kde *t* je parametr, libovolné číslo ($t \in R$). Pak z přímky *q* lze vyčíst, že $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, stejně tak i pro přímku *p*, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = -t$. Tyto hodnoty dosadíme do rovnice a hledáme neznámou y_0.

$$\frac{|0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^1}} = \frac{|0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 - t|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$|y_0| = |y_0 - t|$$

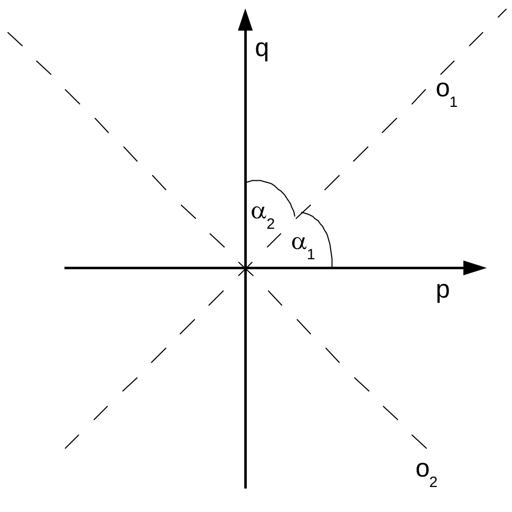
$$y_0 = \pm(y_0 - t)$$

a) $t = 0$, což není řešením rovnice,

b) $y_0 = \dfrac{t}{2}$

Pak *x*-ová souřadnice je též libovolná neboli $x_0 = t$, $t \in R$. Pak bod *A* se pohybuje po přímce, která je rovnoběžná s přímkami *p, q*, a nazývá se osa pásu určená těmito přímkami. Vzdálenost osy pásu *o* od přímky *p* nebo od přímky *q* je rovna polovině vzdálenosti přímek *p, q*.

5) Množiny všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek *p, q*, jsou navzájem kolmé osy úhlů ($o_1 \perp o_2$) sevřených přímkami *p, q*. Tyto osy úhlů jsou také s výjimkou jejich průsečíku *V* množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných různoběžek *p, q*.



Obrázek 5: Důkaz v rovině - úloha 5

Prvním případem, kterým se budeme zabývat, je, když přímky *p, q* jsou totožné s osami *x* a *y*. Pak úhly α_1, α_2 mají stejnou velikost. Vycházíme z předpokladu, že bod na ose úhlu musí mít stejnou vzdálenost jak od přímky *p*, tak od přímky *q*. Přímka *p* má rovnici *p*: $y = 0$, přímka *q*: $x = 0$.

$$d = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$|y| = |x|$$

$$y = \pm x$$

Pak osy úhlů o_1, o_2 mají rovnice o_1: $y = -x$, o_2: $y = x$.

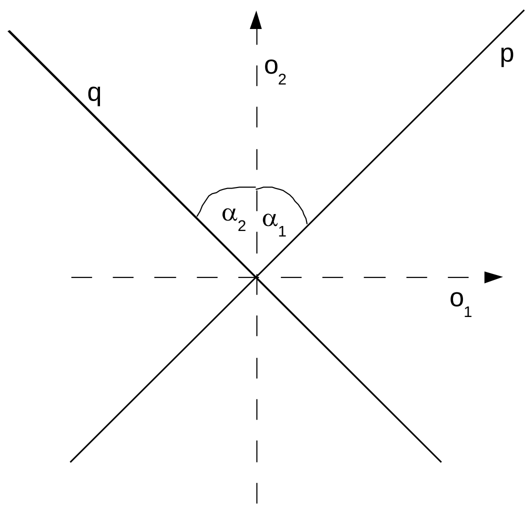
Přesvědčme se ještě, že úhel, který svírá přímka p s osou úhlu o_1, je $\alpha_1 = 45°$. Napišme si směrové vektory přímky p: $\vec{u} = (0;1)$ a osy o_1: $\vec{v} = (-1;1)$. Pak

$$\cos\alpha_1 = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Z toho vyplývá, že $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$. To samé musí platit i pro úhel α_2, který svírá osa o_1 s přímkou q. Směrový vektor osy o_1 již známe, vektor přímky q: $\vec{w} = (1;0)$.

$$\cos\alpha_2 = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_2 = 45°.$$

Závěr: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$



Obrázek 6: Důkaz v rovině - úloha 5

Dalším případem je, že přímky p, q jsou pod úhlem 45° a procházejí počátkem souřadnicového systému. Pak osy o_1, o_2 splývají s osami x, y. Postup je stejný jako v prvním případě.

$$p: y = -x, q: y = x$$

$$d = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} = \frac{|-x + y|}{\sqrt{2}}$$

$$|x + y| = |-x + y|$$

$$x + y = \pm(-x + y)$$

a) $x + y = x - y$

$2y = 0$

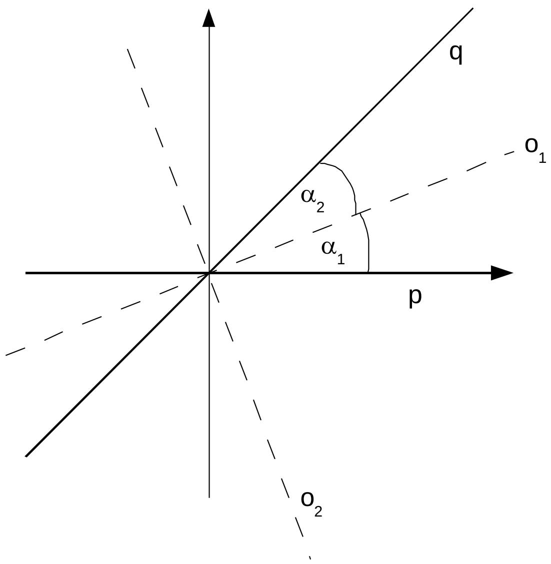
$o_1: y = 0$

b) $x + y = -x + y$

$2x = 0$

$o_2: x = 0$

Důkaz, že úhly α_1, α_2 jsou stejně velké, necháme již na čtenáři. Výsledek by měl být totožný s řešením v prvním případě.



Obrázek 7: Důkaz v rovině - úloha 5

Dále můžeme uvažovat případ, kdy přímka p je totožná s osou x a přímka q je pod úhlem 45° a prochází počátkem soustavy souřadnic. Logicky je jasné, že úhel $\alpha_1 = \alpha_2 = 22{,}5°$. Pokusme se tedy toto tvrzení dokázat stejným způsobem jako doposud.

$$p : y = 0, q : y = -x$$

$$d = \frac{|x \cdot 0 + y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$|y| = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}}$$

$$y = \pm\left(\frac{x + y}{\sqrt{2}}\right)$$

a) $y = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}}$

$y\sqrt{2} = x + y$

$-x + y\sqrt{2} - y = 0$

$-x + y \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$

$o_1 : x - y \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$

b) $y = \dfrac{-x-y}{\sqrt{2}}$

$o_2 : x + y \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) = 0$

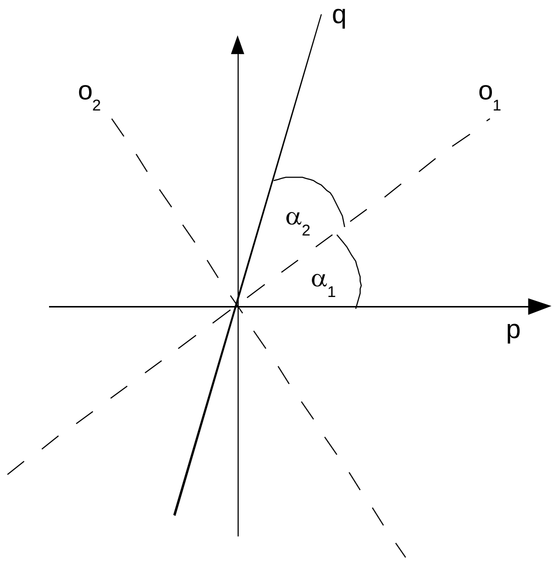
Nyní se přesvědčme o velikostech úhlů α_1, α_2. Stanovíme si směrové vektory přímky p: $\vec{u} = (0;1)$, osy o_1: $\vec{v} = \left(1;1+\sqrt{2}\right)$, přímky q: $\vec{w} = (1;1)$.

$$\cos\alpha_1 = \frac{\left|0\cdot 1 + 1\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{0^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\left|1+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}} \Rightarrow \alpha_1 = 22{,}5°$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\left|1\cdot 1 + 1\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right|}{\sqrt{1^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\left|1+1+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\left|2+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2\cdot\left[1+\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right]}}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 22{,}5°$$

Závěrem je, že $\alpha_1 = \alpha_2$, předpoklad je tedy dokázán.



Obrázek 8: Důkaz v rovině - úloha 5

Další příklad je ten, že přímka p je totožná s osou x: $y = 0$ a přímka q je již zadána obecně q: $ax + by + c = 0$, kde $c = 0$. Pak

$$d = \frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0\cdot x + 1\cdot y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

$$|y| = \frac{|ax+by|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$y = \pm\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

a) $y = \frac{-ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$y \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = -ax - by$

$ax + y \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + by = 0$

$o_1 : ax + y \cdot \left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right) = 0$

b) $y = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$o_2 : -ax + y \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right) = 0$

Zjišťování velikosti úhlů α_1, α_2 by zde již bylo dlouhé a komplikované. To již necháme na čtenáři. My se ještě pokusíme dokázat, že tyto osy o_1, o_2 jsou na sebe kolmé. To znamená, že skalární součin je roven nule.

$$o_1 : \vec{u} = \left(a; b + \sqrt{a^2 + b^2}\right), o_2 : \vec{v} = \left(-a; \sqrt{a^2 + b^2} - b\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 =$$

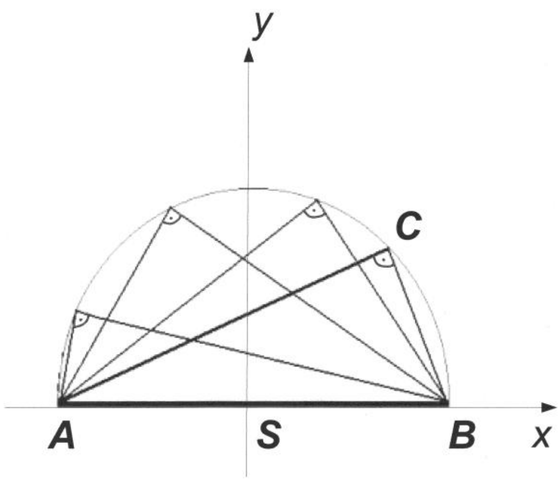
$$= a \cdot (-a) + \left(b + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \cdot \left(\sqrt{a^2 + b^2} - b\right) =$$

$$= \left(-a^2\right) + b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 + a^2 + b^2 - b \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

Je tedy dokázáno, že osy o_1, o_2 jsou na sebe kolmé.

6) Množina všech bodů, z nichž je danou úsečku *AB* vidět pod pravým úhlem, je kružnice sestrojená nad průměrem *AB* (tzv. Thaletova kružnice) s výjimkou bodů *A, B*. Tato Thaletova kružnice je jinak také množinou všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma různými body *A, B*.

Definice Thaletovy kružnice: Sestrojme libovolnou kružnici s průměrem. Koncové body označíme *A* a *B* a zvolíme libovolný bod *C* na kružnici. Pak platí, že trojúhelník *ABC* je pravoúhlý a má pravý úhel u vrcholu *C*.



Obrázek 9: Důkaz v rovině - úloha 6

$A[a_1; a_2] = [-r; 0]$,
$B[b_1; b_2] = [r; 0]$

Budeme tedy určovat množinu všech bodů, z nichž je vidět úsečku AB pod pravým úhlem. Nechť bod $C[x; y]$ roviny vyhovuje podmínce úlohy, tj. úsečka AC je kolmá na úsečku BC. Součin směrnic těchto přímek je tedy roven (-1), tj.

$$\frac{y-a_2}{x-a_1} \cdot \frac{y-b_2}{x-b_1} = -1$$

$$\frac{y-0}{x+r} \cdot \frac{y-0}{x-r} = -1$$

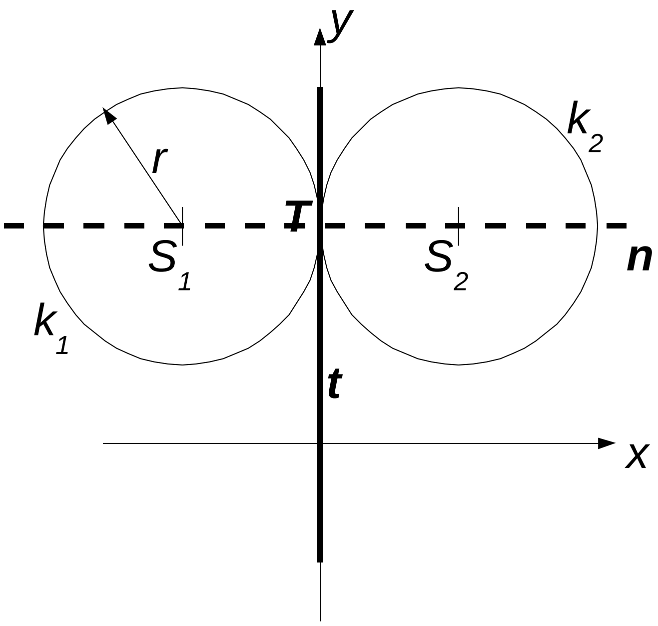
$$y \cdot y = (-1) \cdot (x+r) \cdot (x-r)$$

$$y^2 = -x^2 + r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

což je rovnice kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a má poloměr r. Z toho plyne, že opravdu $AC \perp BC$, pokud $C \neq A$, $C \neq B$. Tím jsme dokázali, že každý bod, z něhož je vidět danou úsečku AB v pravém úhlu, leží na kružnici $x^2 + y^2 = r^2$. Protože bod S je středem úsečky AB a protože velikost úsečky $|AB| = 2r$, je nalezenou množinou všech bodů Thaletova kružnice sestrojená nad průměrem AB s výjimkou bodů A, B.

7) **Množina všech středů kružnic, která se dotýká dané přímky *t* v jejím daném bodě *T*, je přímka *n* jdoucí daným bodem *T* kolmo k dané přímce *t* (normála přímky *t* v bodě *T*), ale s výjimkou tohoto bodu.**



Obrázek 10: Důkaz v rovině - úloha 7

Víme, že vzdálenost bodu S od přímky t je rovna poloměru r kružnice k. Souřadnice bodu S jsou $S[x_0; y_0]$ a ty jsou pro nás neznámé. Přímka t je tečnou ke kružnici k, prochází bodem T a její rovnice je t: $x = 0$. Můžeme tedy psát, že

$$d(St)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$r=\frac{|1\cdot x_0+0\cdot y_0+0|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|x_0|}{1}$$

$$x_0=\pm r$$

Pokusme se tedy najít ještě *y*-ovou souřadnici bodu *S*. Vycházíme ze stejné myšlenky, a to že délka úsečky *ST* je rovna poloměru *r*. Bod *T* se tedy pohybuje pouze po přímce *t*, takže jeho *x*-ová souřadnice je nulová, tedy $T[0; y_T]$.

$$|ST|=r=\sqrt{(x_T-x_S)^2+(y_T-y_S)^2}$$

Rovnici umocníme a upravíme:

$$r^2=(0-r)^2+(y_T-y_0)^2$$

$$r^2=r^2+{y_T}^2-2y_Ty_0+{y_0}^2$$

$${y_0}^2-2y_Ty_0+{y_T}^2=0,$$

což je kvadratická rovnice, a protože bod *T* je jediným průsečíkem přímky *t* a kružnice *k*, diskriminant této kvadratické rovnice by měl být roven nule.

$$D=b^2-4ac=(-2y_T)^2-4\cdot 1\cdot {y_T}^2=4{y_T}^2-4{y_T}^2=0$$

$$y_0=\frac{-b}{2a}=\frac{2y_T}{2}=y_T$$

Pak tedy dostáváme dva středy kružnic, $S_1[r; y_T]$ a $S_2[-r; y_T]$. To znamená, že středy všech kružnic se pohybují po přímce *n*, která je ve vzdálenosti y_T od osy *x*, a tato přímka *n* je kolmá k přímce *t* a prochází body S_1, S_2, *T*. O tomto tvrzení se můžeme lehce přesvědčit. Přímka *n* je tedy určena dvěma body S_1, S_2.

Pak je směrový vektor $\vec{u}=S_2-S_1=(-r-r; y_T-y_T)=(-2r;0)$. K tomuto směrovému vektoru určíme normálový vektor $\vec{n}=(0;2r)$. Pak přímka *n* má rovnici:

$$0\cdot x+2r\cdot y+c=0$$

$$2ry+c=0$$

Koeficient *c* vypočteme tak, že do získané rovnice dosadíme souřadnice bodu *T*, tedy $T\in n$:

$$2ry_T+c=0$$

$$c=-2ry_T$$

Ten dosadíme do původní rovnice přímky *n*:

$$2ry-2ry_T=0$$

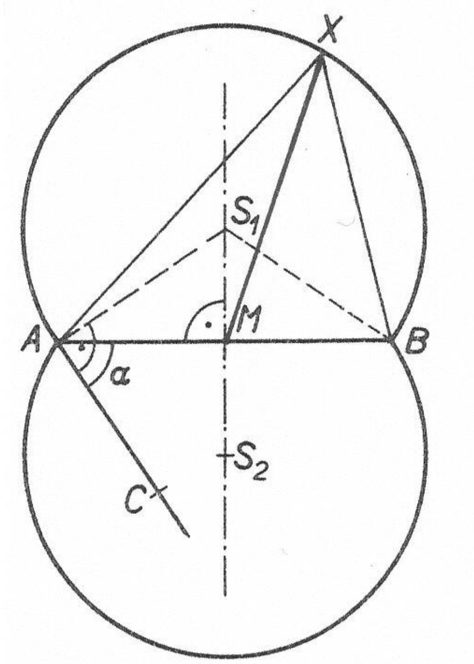
$$2r\cdot(y-y_T)=0\ /:2r$$

$$y-y_T=0$$

$$y=y_T$$

Závěr: Všechny středy kružnic, které se dotýkají přímky *t* v bodě *T*, leží na normále *n* přímky *t*. Normála přímky *n* je kolmá na přímku *t* v bodě *T*.

8) Množiny všech bodů, které jsou vrcholy úhlů shodných s dutým úhlem α a jejichž ramena procházejí dvěma danými body A, B ($A \neq B$), čili množina všech bodů X, z nichž vidíme úsečku AB pod úhlem α, jsou dva shodné kruhové oblouky AX_1B, AX_2B s výjimkou bodů A, B souměrně sdružené podle přímky AB, přičemž pro body X_1, X_2 platí: $AX_1 = BX_1 = AX_2 = BX_2 = \dfrac{AB}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$.



Obrázek 11: Důkaz v rovině - úloha 8

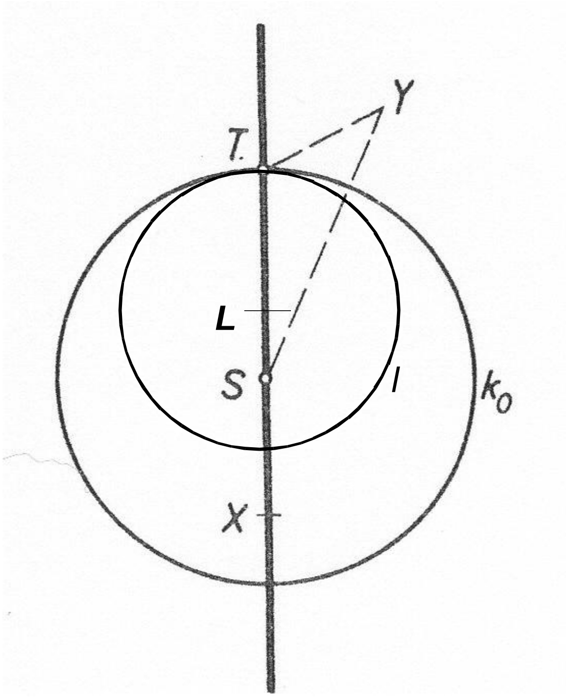
Nechť bod M je střed úsečky AB. Pak $|AM| = |MB| = \frac{1}{2}|AB|$. Dále nechť velikost úhlu $|\angle AXM| = \beta$ se rovná polovině úhlu $\alpha = |\angle AXB|$. Tj. $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. Pak platí:

$$\sin\beta = \frac{|AM|}{|AX|}$$

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|AX|}$$

$$\Rightarrow |AX| = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{|AB|}{2\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

9) Množina všech středů kružnic, která se dotýká dané kružnice $k_0(S; |ST|)$ v jejím daném bodě T, je přímka $n = ST$ (normála kružnice k v bodě T) s výjimkou bodů S, T.



Obrázek 12: Důkaz v rovině - úloha 9

Nechť je v souřadnicovém systému dána kružnice k_0, která má počátek v bodě $S[r; 0]$ a její poloměr je r. Tato kružnice protíná osu x v počátku a dále v bodě $T[2r; 0]$. Pak hledáme střed kružnice l, která má s kružnicí k vnitřní dotyk právě v bodě T, a její poloměr r' je menší než r. Máme tedy dokázat, že hledaný střed L leží na úsečce ST, které se říká normála kružnice. Je tedy jasné, že y-ová souřadnice bodu L je nulová.

Napišme rovnice obou kružnic a danou soustavu dvou rovnic o dvou neznámých postupně upravujeme:

$$(x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 = (r')^2$$
$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_L + x_L{}^2 + y^2 = (r')^2$$
$$x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r^2$$

Druhou rovnici vynásobíme (-1) a s první rovnicí sečteme:

$$-2xx_L + 2xr + x_L{}^2 = (r')^2$$

Protože bod T je společný pro obě rovnice kružnice, můžeme za x dosadit $2r$:

$$x_L{}^2 - 2 \cdot 2r \cdot x_L + 2 \cdot 2r \cdot r = (r')^2$$
$$x_L{}^2 - 4rx_L + 4r^2 - (r')^2 = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, zbývá určit x_L:

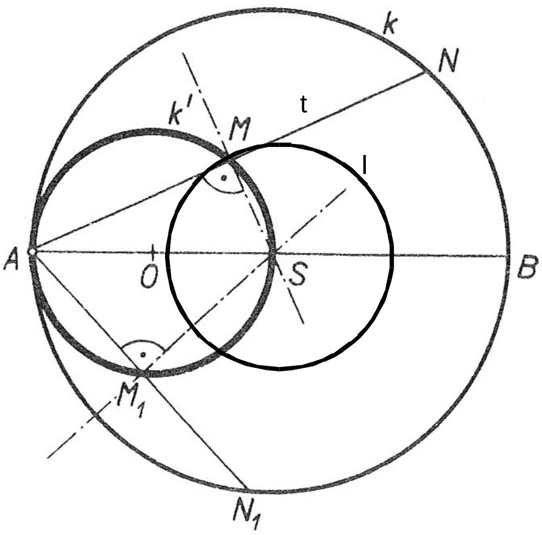
$$D = b^2 - 4ac = (-4r)^2 - 4\cdot 1\cdot\left[4r^2 - (r')^2\right] = 16r^2 - 16r^2 + 4\cdot(r')^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4\cdot(r')^2} = 2r'$$

$$x_{L_{1;2}} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{4r\pm 2r'}{2} = 2r\pm r'$$

A protože kružnice l má mít s kružnicí k vnitřní dotyk právě v bodě T, pak souřadnice $x_L = 2r - r'$. Tím jsme dokázali, že množinou všech středů takovýchto kružnic je úsečka ST. Nechť tedy ještě dokážeme, že je to tato úsečka mimo bodů S, T. Kdyby $r_L = 0$, pak $x_L = 2r$, ovšem kružnice s nulovým poloměrem neexistuje. Kdyby $r_L = r$, pak $x_L = r$, pak kružnice l by byla soustředná s kružnicí k, navíc totožná (se stejným poloměrem).

10) Množina středů všech shodných tětiv (velikost $t < 2r$) dané kružnice $k(S; r)$ je kružnice l s danou soustředná, která se těchto tětiv dotýká a má poloměr $r' = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{2}t\right)^2}$.



Obrázek 13: Důkaz v rovině - úloha 10

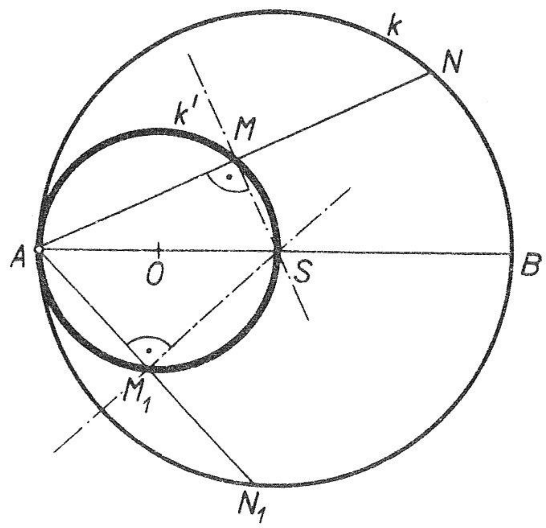
Chceme zjistit poloměr kružnice l (délku úsečky SM), která je množinou středů všech shodných tětiv. Vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku ASM s pravým úhlem u vrcholu M. Použijeme Pythagorovu větu:

$$|AM|^2 + |SM|^2 = |AS|^2 \Rightarrow |SM|^2 = |AS|^2 - |AM|^2$$

$$(r')^2 = r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

$$r' = \sqrt{r^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

11) Množina středů tětiv kružnice *k*(*S; r*), která má společný jeden krajní bod *A*, je kružnice *k'* sestrojená nad průměrem *AS* s výjimkou bodu *A*.



Obrázek 14: Důkaz v rovině - úloha 11

Uvažujme, že bod *S* leží v počátku souřadnicového systému. Kružnice *k* má tedy střed v bodě *S* a má poloměr *r*. Pak kružnice *k'* má střed v bodě *O*, který je středem úsečky *AS*, a má poloměr $\frac{r}{2}$. Pak tedy bod *A* má souřadnice *A*[-*r*; 0]. Libovolný bod na kružnici *k* označme *N*, ten má souřadnice $N[x_0; y_0]$.

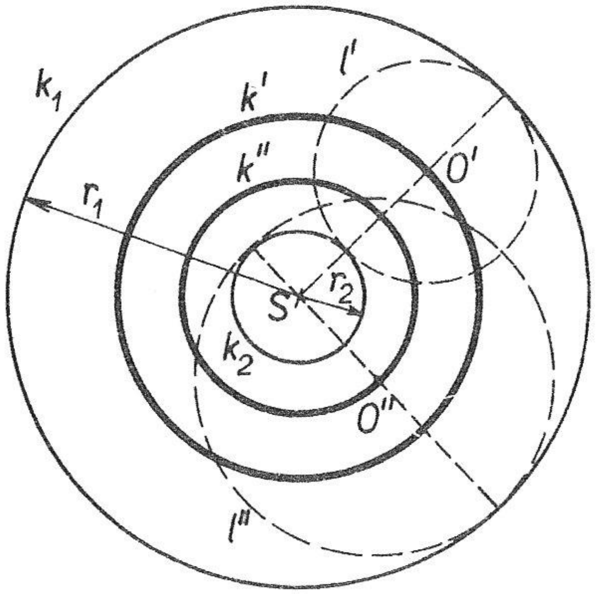
Získáme souřadnice bodu $M\left[\frac{x_0 - r}{2}; \frac{y_0}{2}\right]$, který vyhovuje podmínce úlohy. Rovnice kružnice *k'* má tvar:

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2.$$

Za *x, y* dosadíme souřadnice bodu *M*: $\left(\frac{x_0 - r}{2} + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Rovnici upravíme. Výsledkem je, že $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, což je rovnice kružnice.

12) **Množina středů všech kružnic, která se dotýká dvou daných soustředných kružnic o poloměrech r_1 a r_2 ($r_1 > r_2$) a mají**

- **s menší kružnicí vnější dotyk a s vnější kružnicí vnitřní dotyk, je s nimi soustředná kružnice k' o poloměru $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, přičemž poloměr těch kružnic (např. kružnice l') je $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$.**
- **s oběma kružnicemi vnitřní dotyk, je s nimi soustředná kružnice k'' o poloměru $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$, přičemž poloměr těch kružnic (např. kružnice l'') je $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.**



Obrázek 15: Důkaz v rovině - úloha 12

Nejprve objasněme první případ, kdy kružnice l' má s menší kružnicí vnější dotyk a s větší kružnicí vnitřní dotyk. Pak kružnice l' má střed v bodě O'. Zajímejme se tedy o její poloměr: průměr hledané kružnice je (r_1 – r_2), poloměr je tedy polovina tohoto průměru: $\frac{1}{2}(r_1 - r_2)$.

Pak množina středů všech těchto kružnic je kružnice soustředná s kružnicemi k_1, k_2 a s poloměrem:

$$r_2 + \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = r_2 + \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2).$$

Tzn., že kružnice $l'\left(O'; \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\right)$, kružnice $k'\left(S; \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\right)$.

Stejným způsobem provedeme důkaz i pro případ, kdy hledaná kružnice *l″* má s oběma kružnicemi vnitřní dotyk. Tedy tato kružnice má střed v bodě *O″* a její poloměr je: průměr kružnice *l″* je ($r_1 + r_2$), poloměr je tedy polovina tohoto průměru: $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

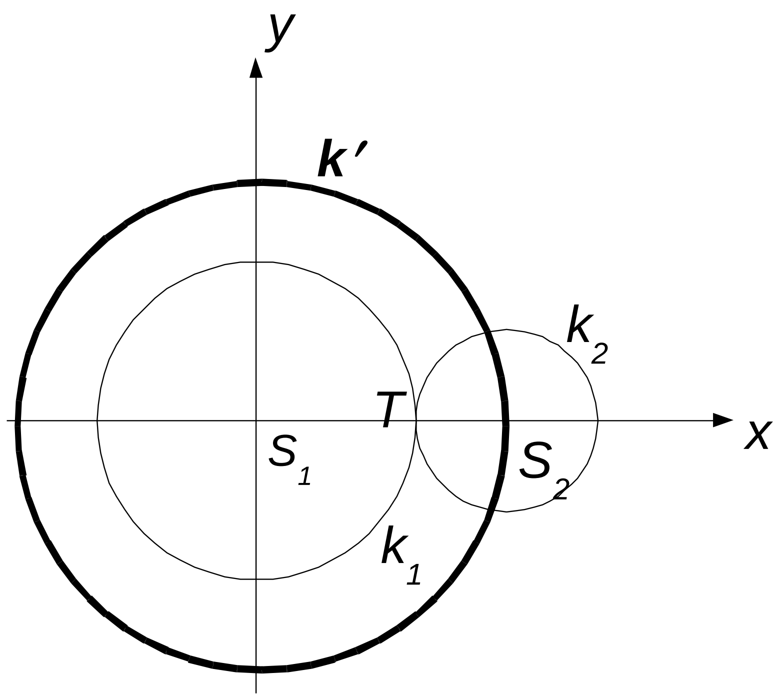
Pak množina středů všech těchto kružnic je kružnice soustředná s kružnicemi k_1, k_2 a poloměrem:

$$\frac{1}{2}(r_1 + r_2) - r_2 = \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}r_2 - r_2 = \frac{1}{2}r_1 - \frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2).$$

Tzn., že kružnice $l''\left(O''; \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\right)$, kružnice $k''\left(S; \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\right)$.

13) Množina všech středů kružnic, která má daný poloměr *r′* a má s danou kružnicí *k_1(S_1; r)* dotyk

- **vnější, je s danou kružnicí soustředná kružnice *k′*(S_1; *r* + *r′*),**
- **vnitřní, je s danou kružnicí soustředná kružnice *k″*(S_1; |*r* - *r′*|), je-li *r′* ≠ *r*.**



Obrázek 16: Důkaz v rovině - úloha 13

Kružnice k_1 má počátek v bodě S_1, který má souřadnice S_1[0; 0], a poloměr *r*. Druhá kružnice k_2 má počátek v bodě S_2, který má souřadnice S_2[a; b], kde souřadnici *a* hledáme a souřadnice *b* je nulová. Tato kružnice má poloměr *r′*. Tečný bod je společný pro obě tyto kružnice a nechť má souřadnice *T*[*r*; 0]. Napišme tedy rovnice dvou kružnic:

$$k_1 : x^2 + y^2 = r^2$$

$$k_2 : (x - a)^2 + y^2 = (r')^2$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. První rovnici vynásobíme (-1) a rovnice sečteme:

$$(x-a)^2 - x^2 = (r')^2 - r^2 .$$

Danou rovnici upravíme. Neboť bod *T* je společný pro obě kružnice, za *x* dosadíme první souřadnici tečného bodu. A dostáváme kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 2ax + a^2 - x^2 = (r')^2 - r^2$$

$$a^2 - 2ax + r^2 - (r')^2 = 0$$

$$a^2 - 2ar + r^2 - (r')^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[r^2 - (r')^2 \right] = 4r^2 - 4r^2 + 4 \cdot (r')^2 = 4 \cdot (r')^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4 \cdot (r')^2} = 2r'$$

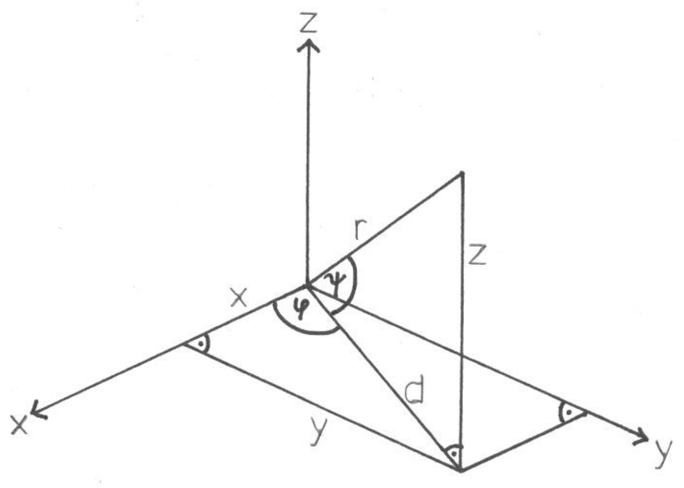
$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2r \pm 2r'}{2} = \frac{2 \cdot (r \pm r')}{2} = r \pm r'$$

Závěrem je, že pokud kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk, pak množinou všech středů kružnic, je kružnice soustředná s kružnicí k_1 a má poloměr ($r + r'$). Pokud dané dvě kružnice mají vnitřní dotyk, pak množinou všech středů kružnic je opět kružnice soustředná s kružnicí k_1 a má poloměr ($|r - r'|$). Tento rozdíl poloměrů dáme raději do absolutní hodnoty, kdyby poloměr kružnice k_1 by byl menší než poloměr kružnice k_2.

3. MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÉ VLASTNOSTI V PROSTORU

Podobně jako v rovině můžeme i v prostoru uvažovat množiny všech bodů jistých daných vlastností.

1) **Množina všech bodů, které mají od daného bodu *A* danou vzdálenost *r*, je kulová plocha o středu *A* a poloměru *r*. Tato kulová plocha je rovněž množinou všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr *r* a procházejí daným bodem *A*.**



Obrázek 17: Důkaz v prostoru - úloha 1

Kulová plocha vznikne rotací kružnice kolem libovolného jejího průměru.

<u>Parametrické vyjádření:</u>

$$\cos\psi = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \cdot \cos\psi$$

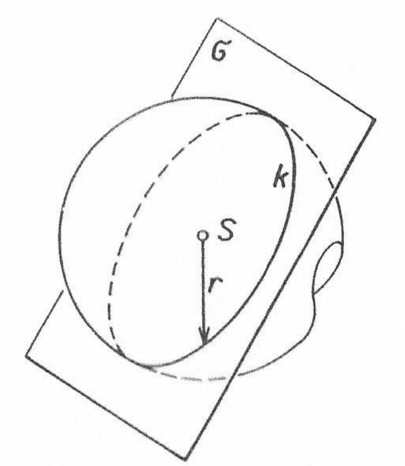
$$\cos\varphi = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{d} \Rightarrow y = d \cdot \sin\varphi = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi$$

$$\sin\psi = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cdot \sin\psi$$

$$\varphi \in \langle 0; 2\pi)$$

$$\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

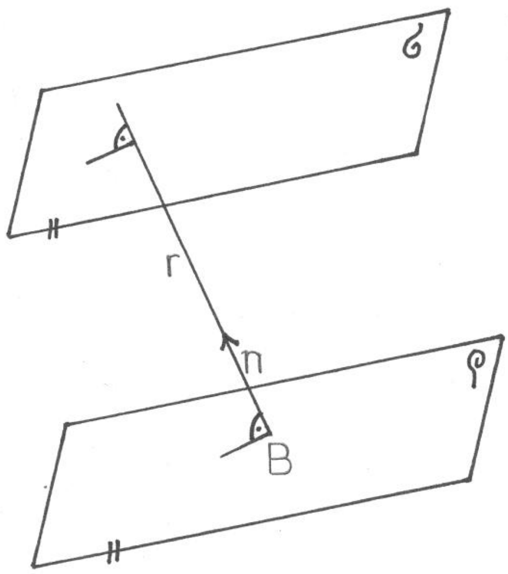


Obrázek 18: Důkaz v prostoru - kulová plocha

Implicitní vyjádření: Má-li střed A kulové plochy souřadnice $A[a;\ b;\ c] = [0;\ 0;\ 0]$ a rovná-li se poloměr kulové plochy číslu r, je bod $X[x;\ y;\ z]$ bodem kulové plochy právě tehdy, platí-li:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$
$$r^2\cdot\cos^2\psi\cdot\cos^2\varphi+r^2\cdot\cos^2\psi\cdot\sin^2\varphi+r^2\cdot\sin^2\psi=r^2$$
$$r^2\cdot\cos^2\psi\cdot\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+r^2\cdot\sin^2\psi=r^2$$
$$r^2\cdot\cos^2\psi+r^2\cdot\sin^2\psi=r^2$$
$$r^2\cdot\left(\cos^2\psi+\sin^2\psi\right)=r^2$$
$$r^2=r^2$$

2) **Množina všech bodů, které mají od dané roviny ρ danou vzdálenost r, jsou dvě roviny rovnoběžné s rovinou ρ ve vzdálenosti r. Tyto roviny jsou rovněž množinou všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané roviny ρ.**



Obrázek 19: Důkaz v prostoru - úloha 2

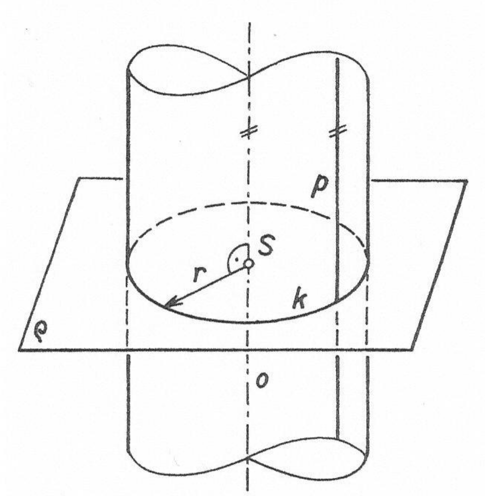
$$\rho: ax+by+cz+d_\rho=0$$
$$\sigma: kax+kby+lcz+d_\sigma=0 \Rightarrow ax+by+cz+d_\sigma=0$$
$$B[x_0;y_0;z_0]\in\rho$$
$$ax_0+by_0+cz_0=-d_\rho$$

Vzdálenost bodu B od roviny σ je rovna poloměru r:

$$r=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d_\sigma|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|d_\sigma-d_\rho|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Dvě roviny jsou rovnoběžné různé, jestliže jejich normálové vektory jsou lineárně závislé (jeden je k-násobkem druhého), nemají žádný společný bod.

3) **Množina všech bodů, které mají od dané přímky *p* danou vzdálenost *r*, je rotační válcová plocha o poloměru *r*, jejíž osou je přímka *p*. Tato válcová plocha je rovněž množinou všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr *r* a dotýkají se dané přímky *p*.**



Obrázek 20: Důkaz v prostoru – rotační válcová plocha

Parametrické vyjádření:

$S[a; b; c] = [0; 0; 0]$

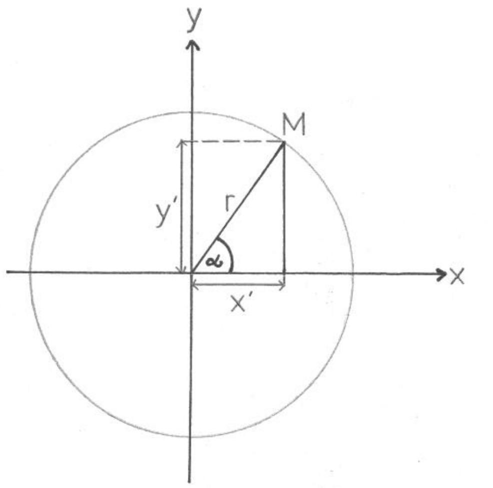
$$\cos\alpha = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \sin\alpha$$

$$z = t$$

$$t \in R$$

$$\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$$



Obrázek 21: Důkaz v prostoru - úloha 3

Implicitní vyjádření:

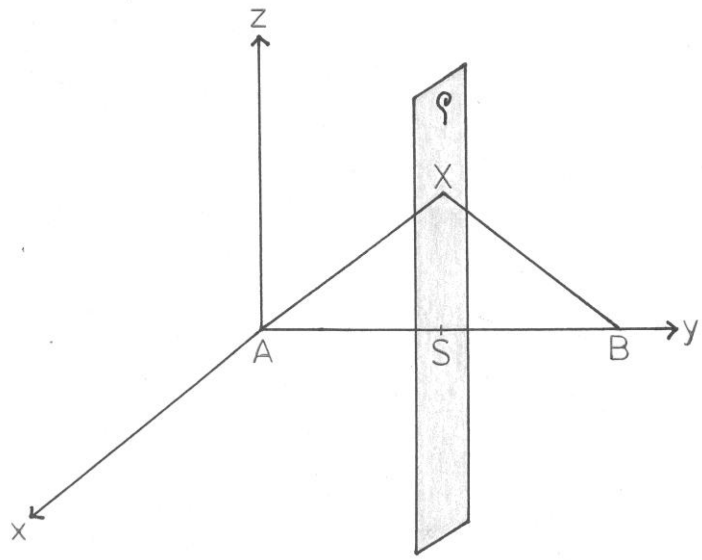
$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$\frac{r^2 \cdot \cos^2\alpha}{r^2} + \frac{r^2 \cdot \sin^2\alpha}{r^2} = 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$1 = 1$$

4) **Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů *A, B* je rovina souměrnosti úsečky *AB*. Tato rovina je rovněž množinou všech středů kulových ploch, které procházejí danými dvěma body *A, B*.**



Obrázek 22: Důkaz v prostoru - úloha 4

$A[a_1; a_2; a_3] = [0; 0; 0]$

$B[b_1; b_2; b_3] = [0; b_2; 0]$

$X[x; y; z]$

Pak bod *X* je bodem roviny souměrnosti úsečky *AB* a platí, že vzdálenost úsečky *AX* je rovna vzdálenosti úsečky *BX*.

$$|AX|^2 = |BX|^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y - b_2)^2 + z^2$$

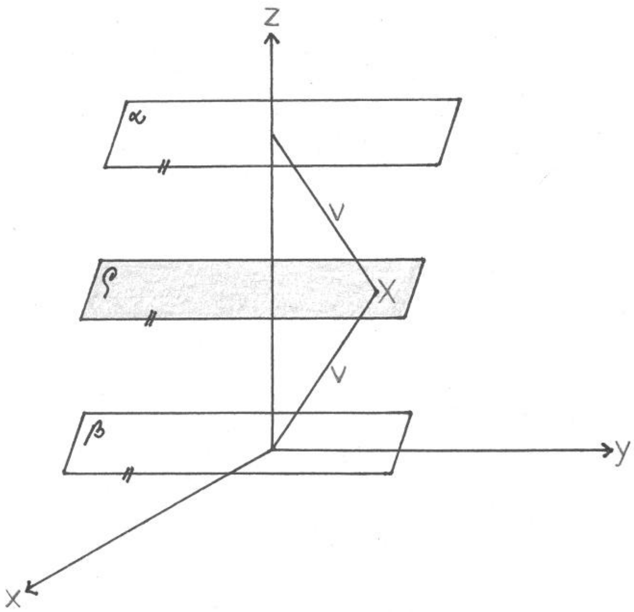
$$y^2 = y^2 - 2yb_2 + b_2{}^2$$

$$2yb_2 = b_2{}^2$$

$$y = \frac{b_2}{2}$$

Pak *x, z* jsou libovolné. Rovina ρ je tedy rovnoběžná s osami *x, z*, je kolmá na osu *y* a prochází středem *S* úsečky *AB*.

5) Množina všech bodů stejně vzdálených od dvou daných rovnoběžných rovin je rovina souměrnosti těchto rovin. Je rovněž množinou všech středů kulových ploch, které se daných rovnoběžných rovin dotýkají.



Obrázek 23: Důkaz v prostoru - úloha 5

$X[x_1; x_2; x_3]$

$\alpha : ax + by + cz + d_\alpha = 0$

$\beta : kax + kby + kcz + kd_\beta = 0 \Rightarrow ax + by + cz + d_\beta = 0$

Vzdálenost v bodu X od roviny α se rovná vzdálenosti v bodu X od roviny β:

$$v = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\alpha|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\beta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\alpha = \pm(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\beta)$$

a) $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\alpha = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\beta$

$d_\alpha = d_\beta$,

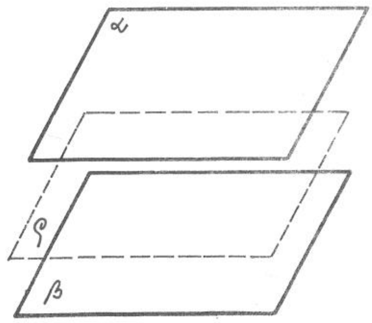
což není řešením rovnice, protože rovina α je pak totožná (splývá) s rovinou β.

b) $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d_\alpha = -ax_1 - bx_2 - cx_3 - d_\beta$

$2ax_1 + 2bx_2 + 2cx_3 + d_\alpha + d_\beta = 0$

$2 \cdot (ax_1 + bx_2 + cx_3) + d_\alpha + d_\beta = 0$

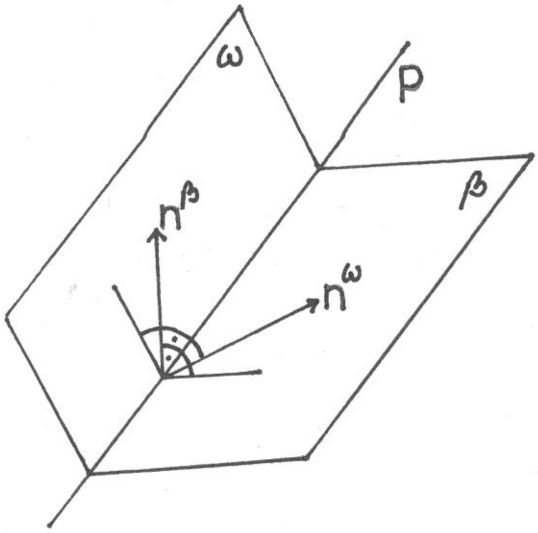
$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \frac{d_\alpha + d_\beta}{2} = 0$



Obrázek 24: Důkaz v prostoru – rovina souměrnosti dvou rovnoběžných rovin

Pak rovina $\rho: ax + by + cz + \frac{d_\alpha + d_\beta}{2} = 0$ je rovnoběžná s rovinami α, β a je rovinou souměrnosti daných dvou rovnoběžných rovin.

6) Množina všech bodů vzdálených od dvou daných různoběžných rovin jsou roviny souměrnosti daných rovin. Tyto roviny jsou s výjimkou své průsečnice rovněž množinou všech středů kulových ploch, které se obou daných rovin dotýkají.



Obrázek 25: Důkaz v prostoru - úloha 6

V prvním případě si speciálně zvolíme roviny ρ, σ. Rovina ρ je rovnoběžná s osami x, y, tedy ρ: $z = 0$. Rovina σ je rovnoběžná s osami x, z, tedy σ: $y = 0$. Průsečnice p je vlastně osou x. Zvolme si libovolný bod X z hledané roviny α. Pak jeho vzdálenost k rovině ρ je stejná jako k rovině σ, tedy:

$$\frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$$|z| = |y|$$

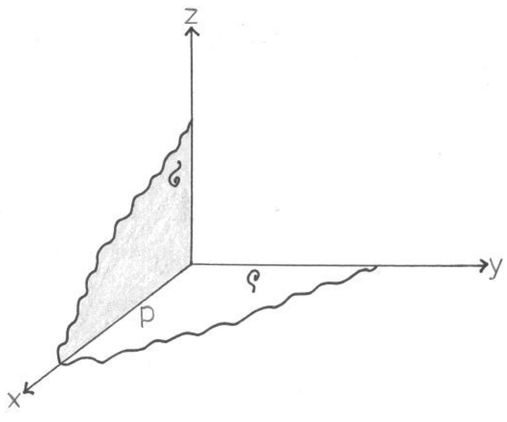
$$z = \pm y$$

a) $z = y$

α_1: $-y + z = 0$

b) $z = -y$

α_2: $y + z = 0$



Obrázek 26: Důkaz v prostoru - úloha 6

V druhém případě si zvolíme rovinu ρ tak, že je rovnoběžná s osami x, y, tedy ρ: $z = 0$. Rovina σ je pak zadána obecně, σ: $ax + by + cz + d = 0$. Pak roviny souměrnosti $\alpha_{1,2}$ mají rovnice:

$$\frac{|0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$z=\pm\left(\frac{ax+by+cz+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$$

a) $z\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=ax+by+cz+d$

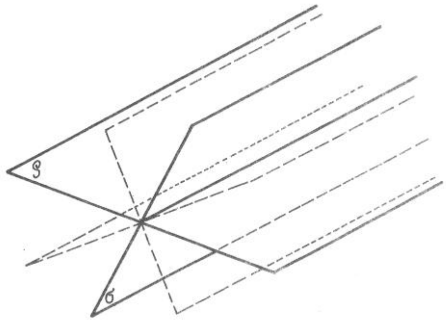
$$ax+by+cz-z\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}+d=0$$

$$\alpha_1: ax+by+z\cdot\left(c-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)+d=0$$

b) $z\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=-(ax+by+cz+d)$

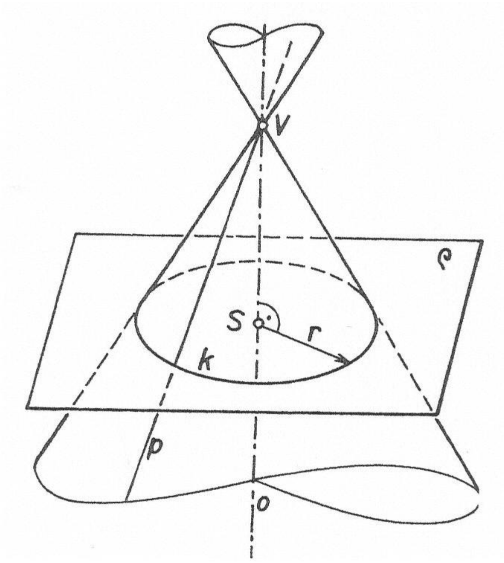
$$ax+by+cz+z\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}+d=0$$

$$\alpha_2: ax+by+z\cdot\left(c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)+d=0$$



Obrázek 27: Důkaz v prostoru - roviny souměrnosti dvou různoběžných rovin

7) Množina všech přímek, které procházejí daným bodem *V* a mají od dané roviny ρ danou odchylku α, je rotační kuželová plocha, která má vrchol *V*, osu kolmou k rovině ρ a úhel osového řezu při vrcholu *V* má velikost 180° - 2α.

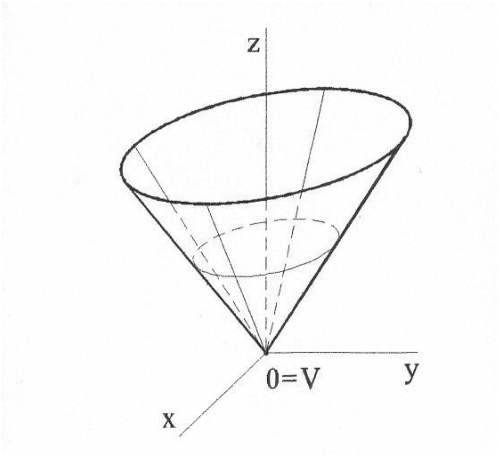


Obrázek 28: Důkaz v prostoru – rotační kuželová plocha

Rotační kuželová plocha vznikne rotací různoběžných přímek kolem osy úhlu, který vytvářejí. Nechť vrchol *V* má souřadnice *V*[0; 0; 0].

Parametrické vyjádření:

$$x=a\cdot t\cdot\cos\alpha$$
$$y=b\cdot t\cdot\sin\alpha$$
$$z=t$$
$$t\in R$$
$$\alpha\in\langle 0;2\pi\rangle$$



Implicitní vyjádření:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

$$\frac{a^2\cdot t^2\cdot\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{b^2\cdot t^2\cdot\sin^2\alpha}{b^2}=t^2$$

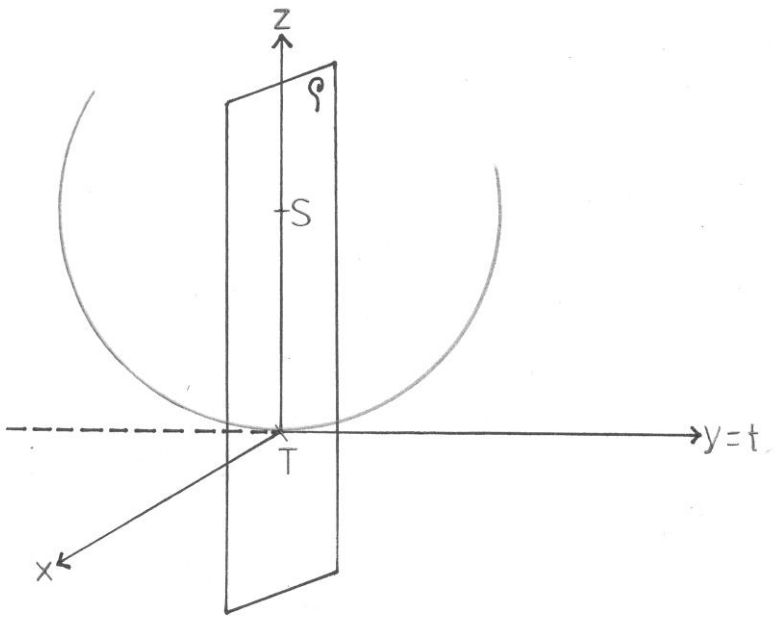
$$t^2\cdot\cos^2\alpha+t^2\cdot\sin^2\alpha=t^2$$

$$t^2\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=t^2$$

$$t^2=t^2$$

Obrázek 29: Důkaz v prostoru - úloha 7

8) Množina všech středů kulových ploch, které se dotýkají dané přímky *t* v daném jejím bodě *T*, je rovina, která prochází bodem *T* a je kolmá k přímce *t*. Bod *T* do ní nepatří.



Obrázek 30: Důkaz v prostoru 8

Zvolíme přímku t jako osu y a bod T umístíme do počátku soustavy souřadnic, tedy $T[0; 0; 0]$. Rovnice přímky t je t: $y = 0$ a její směrový vektor je $\vec{t}=(0;1;0)$. Střed kulové plochy má souřadnice $S[x_S; y_S; z_S]$, které jsou pro nás neznámé. Víme ale, že vzdálenost $|ST| = r$ a vektor TS je kolmý na vektor přímky t, pak skalární součin těchto směrových vektorů je roven nule.

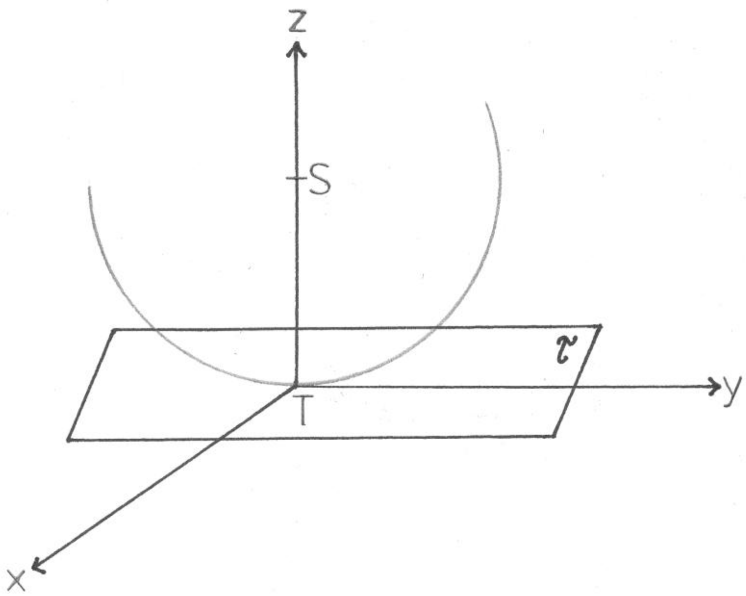
$$\vec{t}=(0;1;0)$$
$$S-T=\vec{u}=\left(x_S;y_S;z_S\right)$$

$$\vec{t} \cdot \vec{u} = 0$$
$$0 \cdot x_S + 1 \cdot y_S + 0 \cdot z_S = 0$$
$$y_S = 0$$

Pak x_S a z_S jsou libovolné. Můžeme tedy říci, že rovina ρ je rovnoběžná s osami x, z a je kolmá k ose y, tedy rovina ρ je kolmá k přímce t a prochází bodem T.

$$\rho: y = 0$$

9) Množina všech středů kulových ploch, které se dotýkají dané roviny τ v daném jejím bodě *T*, je přímka kolmá k rovině τ a procházejí bodem *T*. Bod *T* do ní nepatří.



Obrázek 31: Důkaz v prostoru - úloha 9

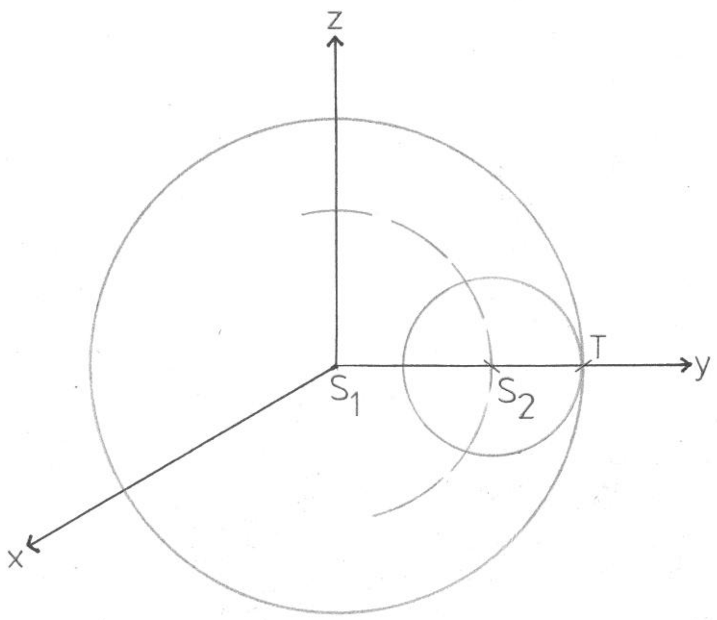
Rovina τ je rovnoběžná s osami x, y, její rovnice je tedy τ: $z = 0$. Bod T umístíme do počátku souřadnicové soustavy. Pak vektor roviny τ je kolmý na vektor TS, kde bod S je střed kulové plochy, jehož souřadnice hledáme.

$\vec{\rho} = (0;0;1)$
$S[x_S; y_S; z_S]$
$T[0;0;0]$
$TS = \vec{u} = (x_S; y_S; z_S)$

$$\vec{\rho} \cdot \vec{u} = 0$$
$$0 \cdot x_S + 0 \cdot y_S + 1 \cdot z_S = 0$$
$$z_S = 0$$

Pak x_S a y_S jsou libovolné. Můžeme tedy říci, že přímka t prochází osou z a tato přímka je kolmá k dané rovině τ v jejím bodě T.

10) Množina všech středů kulových ploch, které mají daný poloměr ρ a dotýkají se dané kulové plochy o poloměru r vně (resp. uvnitř), je kulová plocha s danou soustředná a mající poloměr $r_1 = r + \rho$ (resp. $r_2 = |r - \rho|$).



Obrázek 32: Důkaz v prostoru - úloha 10

Střed dané kulové plochy umístíme do počátku soustavy souřadnic, tedy $S_1[0; 0; 0]$. Střed kulové plochy, která se dané kulové plochy dotýká vně, resp. uvnitř, má souřadnice $S_2[0; b; 0]$. Pak bod T je bodem dotyku obou kulových ploch a dle obrázku má souřadnice $T[0; r; 0]$. Můžeme tedy napsat rovnice obou kulových ploch:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\underline{x^2 + (y-b)^2 + z^2 = \rho^2}$$

Soustavu dvou rovnic postupně upravujeme a za y dosadíme y-ovou souřadnici bodu T ($\{T\} \in k_1 \cap k_2$).

$$-x^2 - y^2 - z^2 = -r^2$$

$$\underline{x^2 + y^2 - 2yb + b^2 + z^2 = \rho^2}$$

$$-2yb + b^2 = \rho^2 - r^2$$

$$b^2 - 2yb + r^2 - \rho^2 = 0$$

$$b^2 - 2br + r^2 - \rho^2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s neznámou b.

$$D = b^2 - 4ac = (-2r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (r^2 - \rho^2) = 4r^2 - 4r^2 + 4\rho^2 = 4\rho^2$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4\rho^2} = 2\rho$$

$$b_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2r \pm 2\rho}{2} = \frac{2 \cdot (r \pm \rho)}{2} = r \pm \rho$$

Tento způsob je analogický jako jsme použili pro množinu všech bodů v rovině. Pak je hledanou množinou kulová plocha soustředná s danou kulovou plochou a mající poloměr $r_1 = r + \rho$, dotýkají-li se kulové plochy vně, nebo $r_2 = |r - \rho|$, dotýkají-li se kulové plochy uvnitř. Rozdíl poloměrů dáme do absolutní hodnoty pro případ, kdyby poloměr r byl menší než poloměr ρ.

4. ŘEŠENÍ KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

4.1. Řešení konstrukčních úloh užitím množin všech bodů dané vlastnosti

Řešení konstrukční úlohy užitím množin všech bodů dané vlastnosti spočívá v tom, že pro každý z hledaných bodů X stanovíme dvě nutné podmínky, které musí splňovat, a pak určíme množiny M_1, M_2 všech bodů splňujících po řadě první a druhou podmínku. Hledaný bod X náleží průniku množin M_1, M_2. Body tohoto průniku sestrojujeme pomocí základních euklidovských konstrukcí.

4.2. Polohové a nepolohové konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy, které budeme řešit, jsou v podstatě dvojího druhu. V úlohách prvního druhu, tzn. v polohových úlohách, je určeno umístění daných prvků (úseček, úhlů apod.), tj. jejich poloha v rovině. Řešení polohové konstrukční úlohy spočívá v tom, že hledáme jeden nebo více neznámých bodů sestrojovaného geometrického útvaru. Podle jejich počtu rozlišujeme konstrukční (polohové) úlohy s jedním, dvěma, resp. více neznámými body. V úlohách druhého druhu, tzv. nepolohových úlohách, je poloha aspoň jednoho z daných prvků libovolně volitelná. Řešení úlohy nepolohové lze vždy převést umístěním některého z daných prvků na úlohu polohovou.

4.3. Postup řešení konstrukčních úloh syntetickou metodou

Postup řešení konstrukční úlohy se vždy skládá ze čtyř základních částí zvaných rozbor (analýza), konstrukce, zápis konstrukce a diskuse.

I. ROZBOR: Předpokládáme, že konstrukční úloha je řešitelná, tj. existuje aspoň jeden hledaný (konstruovaný) útvar v nějakém umístění. Načrtneme ilustrační obrázek a snažíme se najít vztahy mezi danými a hledanými útvary, a to zpravidla tak, že si uvědomíme, které význačné body jsou neznámé, a snažíme se najít pro ně nutné podmínky, jež musí splňovat. V ilustračním obrázku k rozboru nejprve načrtneme výsledný hledaný útvar a dodatečně do něj zakreslíme dané prvky.

II. KONSTRUKCE A ZÁPIS KONSTRUKCE: Ve druhé a třetí fázi postupu řešení se podle výsledků rozboru formuluje konstrukční předpis (jeho stručnému symbolickému zápisu se říká zápis konstrukce). Vyjadřuje postup, kterým z daných prvků (bodů) postupně získáme hledané prvky (neznámé body) a vytvoříme tak hledaný geometrický útvar. Vychází se přitom z rozboru získaných nutných podmínek pro hledané prvky (body). Na základě konstrukčního předpisu se provádí konstrukce graficky.

III. DISKUSE: U konstrukčních úloh s proměnnými prvky se v diskusi řešení stanovuje, za kterých podmínek je úloha řešitelná (tzv. podmínky řešitelnosti), a počet řešení. Postupujeme přitom tak, že sledujeme postupně jednotlivé kroky konstrukčního předpisu získaného jako závěr rozboru a zjistíme podmínky (nutné a postačující), za nichž jsou proveditelné. Stanovení počtu řešení u polohových úloh je jednoduché a jednoznačné: kolik útvarů vyhovujících podmínkám polohové úlohy lze sestrojit, tolik má úloha řešení. U úloh nepolohových se lze omezit na určení podmínek řešitelnosti: chceme-li určovat též počet řešení, je nutné vyslovit přesnou úmluvu o tom, která řešení budeme pokládat za různá. Úmluva zní, že počet řešení nepolohové úlohy budeme pokládat za týž jako u polohové úlohy, na kterou ji převedeme.

4.4. Řešení konstrukčních úloh analytickou metodou

Při řešení konstrukčních úloh můžeme postupovat i analytickou metodou, tj. užitím souřadnic. Analytické řešení konstrukčních úloh bývá mnohdy schůdnější než přímé konstrukční (syntetické) řešení a někdy nám může pomoci nalézt cestu konstrukčního řešení. Řešení konstrukční úlohy zpravidla převádíme na určení bodů, které jsou průnikem množin bodů daných vlastností. Podle toho, zda při užití analytické metody známe (máme odvozena) či neznáme předem analytická vyjádření těchto množin bodů, můžeme rozlišit úlohy dvojího typu:

a) V úlohách prvního typu můžeme použít známé analytické vyjádření potřebných množin bodů (např. kružnice, elipsa, hyperbola, přímka, …).
b) V úlohách druhého typu musíme vyšetřit analytické vyjádření potřebných množin bodů.

Analytické vyšetřování množin bodů bývá mnohdy jednodušší a zejména ho můžeme použít tehdy, když si s řešením syntetickým nevíme rady buď proto, že nedovedeme určit způsob sestrojení jednotlivých bodů hledané množiny bodů, anebo že vyslovenou domněnku neumíme dokázat.

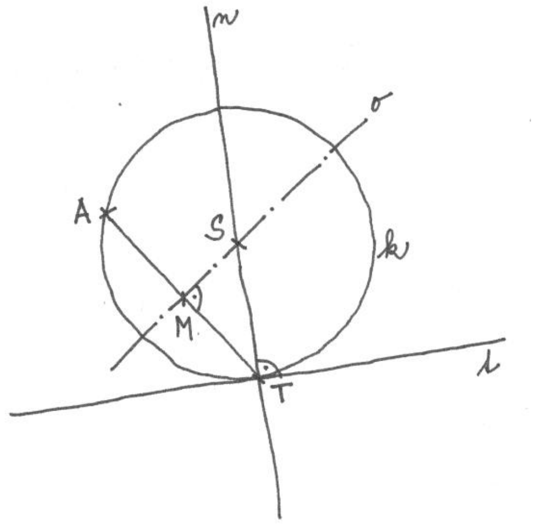
Postup při analytickém vyšetřování množiny bodů dané vlastnosti v rovině je tento:

1. Zvolíme soustavu souřadnic vhodným způsobem vzhledem k daným geometrickým útvarům. Vyjádříme souřadnice daných bodů a označíme souřadnice libovolného bodu X hledané množiny bodů (zpravidla $X[x, y]$). Dané vlastnosti bodu X vyjádříme ve tvaru relace (rovnice, nerovnice) mezi jeho souřadnicemi.
2. Ověříme, zda také obráceně všechny body, jejich souřadnice splňují nalezenou relaci, mají požadované vlastnosti. Přesvědčíme-li se o tom, můžeme prohlásit, že nalezená relace je analytickým řešením hledané množiny bodů.

5. SBÍRKA KONSTRUKČNÍCH ÚLOH

1. **Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem *A* a dotýká se dané přímky *t* v jejím daném bodě *T*.**

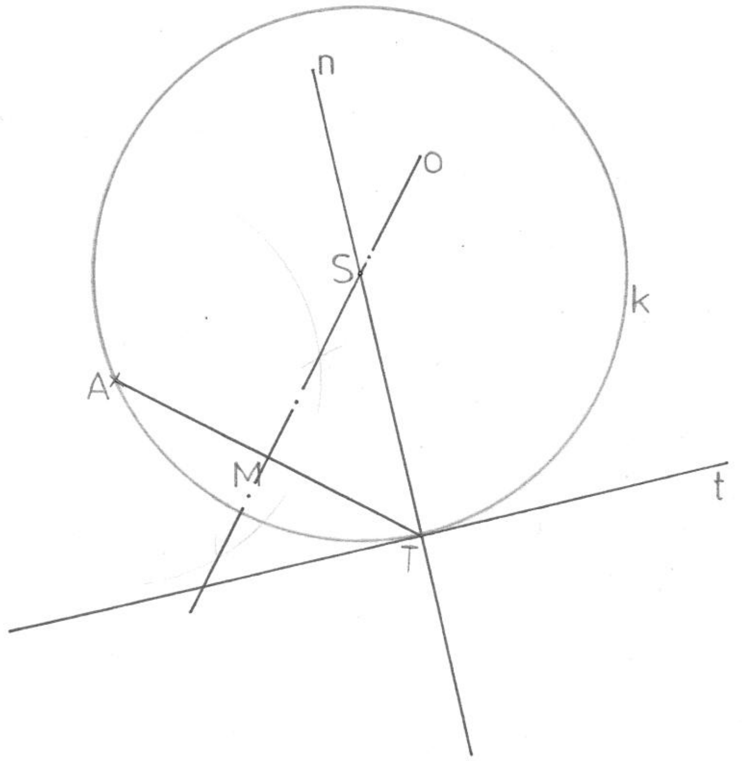
Pappova úloha typu BBp



Obrázek 33: Náčrtek úlohy 1

ROZBOR: Uvažujme, že úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je polohová, protože hledáme pouze jeden bod, a to střed *S* kružnice *k*. Množina všech středů kružnic, která musí procházet jak bodem *A*, tak bodem *T*, je osa úsečky *AT*. Množina všech středů kružnic, která se dotýká přímky *t* v jejím daném bodě *T*, je kolmice *n* na přímku *t* v bodě *T*. Potom přímka *t* je tečnou hledané kružnice *k*, a bod *T* je tečným bodem. Průsečík kolmice *n* a osy úsečky *AT* je hledaný střed *S*.

KONSTRUKCE:



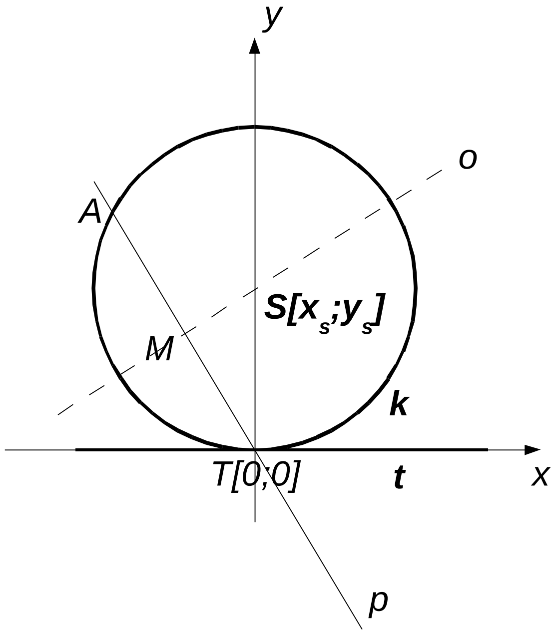
Obrázek 34: Konstrukce úlohy 1

ZÁPIS:

1. zadání: A, t, T ($T \in t$)
2. $\leftrightarrow n$; $n \perp t$, $T \in n$
3. AT
4. M; $M \in \leftrightarrow AT$, $|AM| = |TM|$
5. osa o; $o \perp \leftrightarrow AT$, M $\in o$ (o je osa úsečky AT)
6. S; $\{S\} \in o \cap n$
7. k; $k(S; |ST|)$

DISKUSE: Úloha má právě jedno řešení, jestliže bod A neleží na přímce t. Leží-li bod A na přímce t ($A \neq T$), pak úloha nemá žádné řešení, protože nevznikne žádný průsečík kolmice n s osou úsečky AT.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 35: Analytické řešení úlohy 1

Nechť bod *A* má souřadnice $A[x_a;\ y_a]$, pak můžeme určit přímku *p*, která je určena body *A*, *T*.

$\vec{u} = T - A = (-x_a; -y_a)$ - směrový vektor

$\vec{n} = (y_a; -x_a)$ - normálový vektor

Pak přímka *p* má rovnici:

$$ax + by + c = 0$$

$$y_a \cdot x - x_a \cdot y + c = 0$$

Koeficient *c* získáme tak, že do rovnice dosadíme např. bod *T*. Pak dostáváme $c = 0$. Přímku *p* teď zapišme ve směrnicovém tvaru:

$$x_a \cdot y = y_a \cdot x$$

$$p : y = \frac{y_a}{x_a} \cdot x$$

Pak směrnice přímky *p* je $k_1 = \frac{y_a}{x_a}$. Hledejme nyní rovnici přímky *o*, která je kolmá k přímce *p* a prochází bodem *M*, který je středem úsečky *AT*, tedy jeho souřadnice jsou $M\left[\frac{x_a}{2}; \frac{y_a}{2}\right]$. Pro kolmost dvou přímek platí, že součin směrnic je roven (-1).

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = \frac{-1}{k_1} = \frac{-1}{\frac{y_a}{x_a}} = -\frac{x_a}{y_a}$$

Nyní zapišme přímku o (osa úsečky AT) rovnicí:

$$y = k_2 \cdot x + q$$

$$M \in o: \frac{y_a}{2} = \left(-\frac{x_a}{y_a}\right) \cdot \frac{x_a}{2} + q$$

$$q = \frac{y_a}{2} + \frac{x_a{}^2}{2y_a}$$

Dosadíme kvocient q do původní rovnice osy o a upravíme na obecný tvar:

$$y = \frac{x_a}{y_a} \cdot x + \frac{y_a}{2} + \frac{x_a{}^2}{2y_a}$$

$$o\colon\ 2xx_a - 2yy_a + y_a{}^2 + x_a{}^2 = 0$$

Pak hledaný střed S kružnice k je průsečíkem přímky o a osy y (y: $x = 0$). Z obrázku je ovšem patrné, že x-ová souřadnice bodu S je nulová. Hledáme tedy pouze jeho y-ovou souřadnici.

$$\{S\} = o \cap y$$

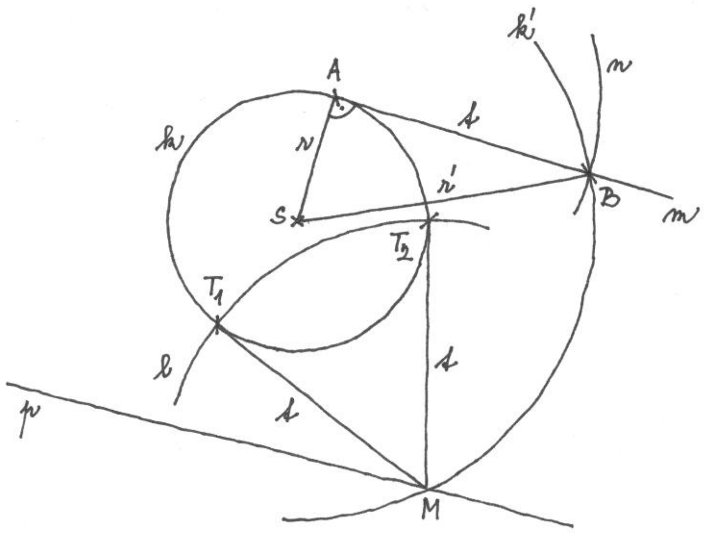
$$2 \cdot 0 \cdot x_a - 2y \cdot y_a + y_a{}^2 + x_a{}^2 = 0$$

$$-2yy_a = -y_a{}^2 - x_a{}^2$$

$$y = \frac{y_a{}^2 + x_a{}^2}{2y_a}$$

Hledaný střed S kružnice k má souřadnice $S\left[0; \frac{y_a{}^2 + x_a{}^2}{2y_a}\right]$.

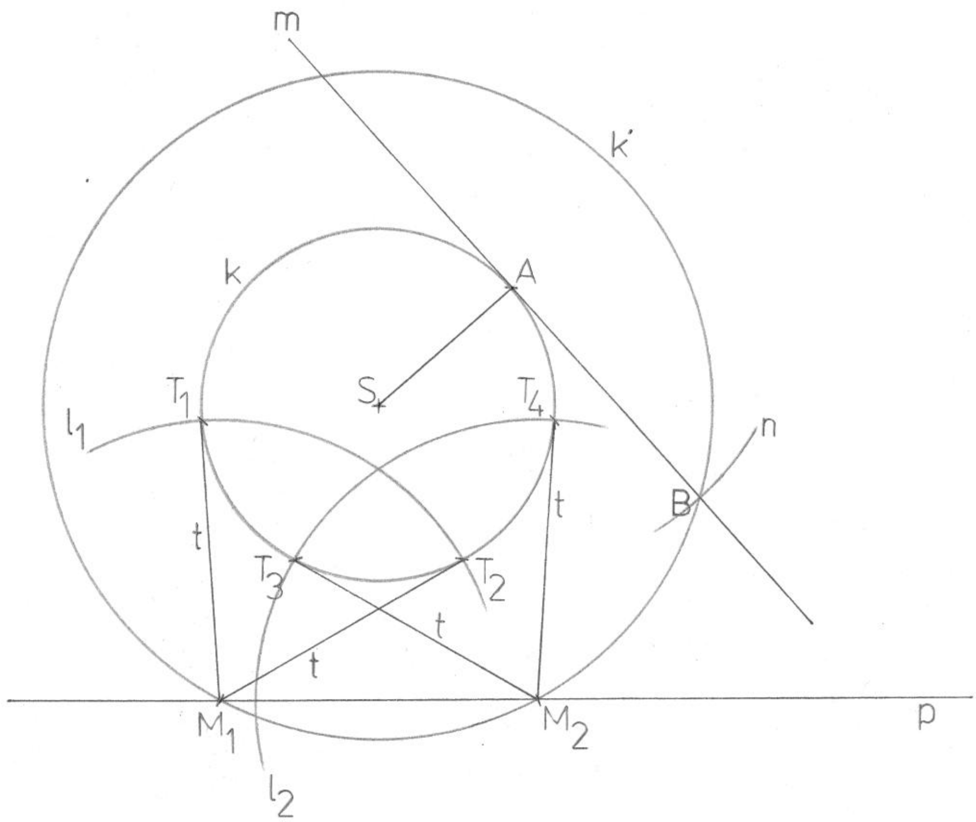
2. **Na dané přímce *p* určete takový bod *M*, aby tečny vedené z něho k dané kružnici *k*(*S; r*) měly danou délku *t*. (Délkou tečny z bodu *M* rozumíme velikost úsečky *MT*, kde *T* je bod dotyku.)**



Obrázek 36: Náčrtek úlohy 2

<u>ROZBOR:</u> Předpokládejme, že úloha má aspoň jedno řešení. Je to úloha polohová, a to s jedním neznámým bodem *M*. Množina všech bodů, která má danou vzdálenost *t* od dotykového bodu *T* vedené k dané kružnici *k*, je soustředná kružnice, která má poloměr $r' = \sqrt{r^2 + t^2}$ (vyplývá z Pythagorovy věty).

KONSTRUKCE:



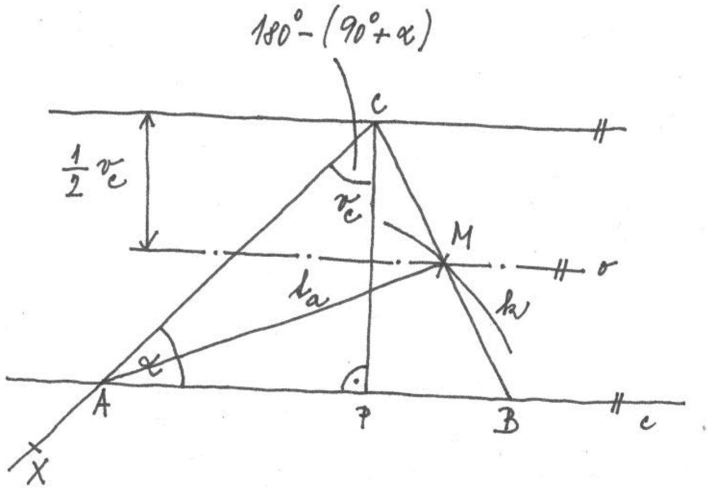
Obrázek 37: Konstrukce úlohy 2

ZÁPIS:

1. zadání: p, $k(S; r)$, $t = |AB| = |MT|$
2. A; $A \in k$ (A je libovolný bod na kružnici k)
3. AS
4. $\leftrightarrow m$; $m \perp AS$, $A \in m$
5. n; $n(A; t)$
6. B; $\{B\} \in m \cap n$
7. k'; $k'(S; |SB|)$
8. M_1, M_2; $\{M_1\} \in p \cap k'$, $\{M_2\} \in p \cap k'$
9. l_1; $l_1(M_1; t)$
10. T_1, T_2; $\{T_1\} \in l_1 \cap k$, $\{T_2\} \in l_1 \cap k$
11. $|M_1T_1| = t$, $|M_1T_2| = t$
12. l_2; $l_2(M_2; t)$
13. T_3, T_4; $\{T_3\} \in l_2 \cap k$, $\{T_4\} \in l_2 \cap k$
14. $|M_2T_3| = t$, $|M_2T_4| = t$

DISKUSE: Počet řešení úlohy závisí na počtu společných bodů M přímky p a kružnice k', tj. na vzdálenosti bodu S od přímky p. Úloha má dvě řešení, jestliže tato vzdálenost je menší než r'. Úloha má právě jedno řešení, je-li vzdálenost rovna r'. Ovšem kdyby tato vzdálenost byla větší než r', pak úloha řešení nemá.

3. **Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána těžnice t_a, výška v_c a úhel $\alpha \neq 90°$.**



Obrázek 38: Náčrtek úlohy 3

ROZBOR: Předpokládejme, že úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je nepolohová. Z náčrtku je patrné, že bod P je pata výšky v_c, bod M je střed strany BC. Umístíme-li úsečku $CP = v_c$, dostáváme úlohu se třemi neznámými body A, B, M. Sestrojíme-li dále pravoúhlý trojúhelník ΔAPC, převedeme danou nepolohovou úlohu na polohovou. Platí, že:

$$\sin\alpha = \frac{|PC|}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{|PC|}{\sin\alpha} = \frac{v_c}{\sin\alpha}$$

Z Pythagorovy věty platí:

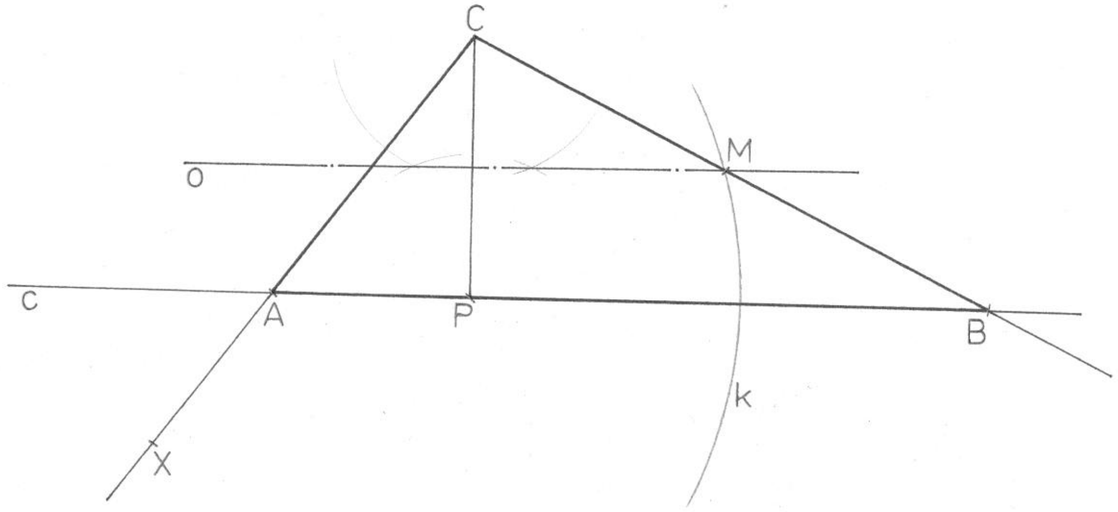
$$|PC|^2 + |AP|^2 = |AC|^2 \Rightarrow |AP|^2 = |AC|^2 - |PC|^2$$

$$|AP|^2 = \left(\frac{v_c}{\sin\alpha}\right)^2 - v_c^{\,2} = \frac{v_c^{\,2}\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\sin^2\alpha} = \frac{v_c^{\,2}\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$|AP| = v_c\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = v_c\cdot\cot g\alpha$$

Víme, že bod M má od vrcholu A vzdálenost t_a. Takže množina všech bodů, která má od vrcholu M vzdálenost t_a, je kružnice $k(A;\, t_a)$. Dále je zřejmé, že bod M má od přímky c vzdálenost $\frac{1}{2}v_c$. Což znamená, že množina všech bodů je osa o úsečky PC.

KONSTRUKCE:



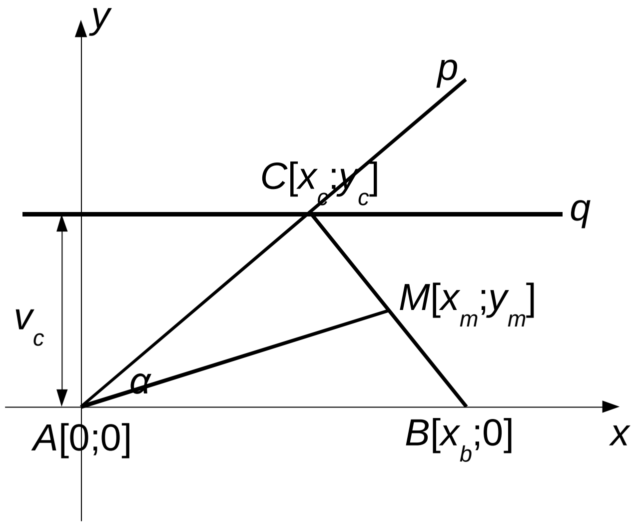
Obrázek 39: Konstrukce úlohy 3

ZÁPIS:

1. zadání: v_c, t_a, α
2. PC; $|PC| = v_c$
3. $\leftrightarrow c$; $c \perp \leftrightarrow PC, P \in c$
4. $\angle PCX$; $|\angle PCX| = 90° - \alpha$
5. A; $A \in c \cap \rightarrow CX$
6. osa o; osa o úsečky PC
7. k; $k(A; t_c)$
8. M; $\{M\} \in o \cap k$
9. B; $\{B\} \in \rightarrow CM \cap c$
10. ΔABC

DISKUSE: Předpokládáme, že úhel α je menší než 90°. Pak úloha má jedno řešení. Pokud ovšem poloměr kružnice k je menší než $\frac{1}{2}v_c$, pak úloha nemá řešení. Kružnice k totiž neprotne osu o v žádném bodě, a tak nevznikne bod M. Uvažujme i případ, kdy úhel α je větší než 90°. Pak je totiž velikost úhlu $|\angle PCX| = \alpha - 90°$. Nechť bod K je průsečík osy o úsečky PC a polopřímky CX. Pak kružnice k protne osu o ve dvou bodech M_1, M_2, je-li poloměr kružnice k menší než velikost úsečky $|AK|$. Pak má úloha dvě řešení. Je-li poloměr kružnice k větší (nebo roven) než velikost úsečky $|AK|$, pak má úloha pouze jedno řešení. Druhý průsečík osy o a kružnice k vznikne totiž tak, že úhel α není při vrcholu A, ale při vrcholu B.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 40: Analytické řešení úlohy 3

Přímka p je dána parametricky:

$$x = t \cdot \cos \alpha$$

$$y = t \cdot \sin \alpha, t \in R$$

Přímka q je rovnoběžná s osou x a je od ní vzdálena o velikost v_c:

$$y = v_c$$

Bod C je průsečíkem přímek p a q, tedy $\{C\} \in p \cap q$:

$$v_c = t \cdot \sin \alpha \Rightarrow t = \frac{v_c}{\sin \alpha}$$

$$x_c = t \cdot \cos \alpha = \frac{v_c}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha = v_c \cdot \cot g\alpha$$

$$y_c = t \cdot \sin \alpha = \frac{v_c}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = v_c$$

Souřadnice bodu $C[v_c \cdot \cot g\alpha; v_c]$. Bod M půlí úsečku BC, pak jeho souřadnice jsou $M\left[\frac{x_b + v_c \cdot \cot g\alpha}{2}; \frac{v_c}{2}\right]$. Nechť délka úsečky AM je rovna délce těžnice t_a.

$$t_a = \sqrt{(x_m - x_a)^2 + (y_m - y_a)^2}$$

$$t_a^{\ 2} = \left(\frac{x_b + v_c \cdot \cot g\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_c}{2}\right)^2$$

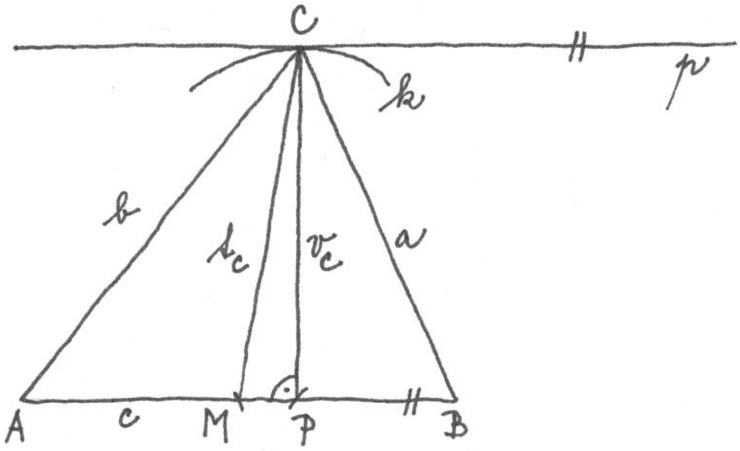
$$\frac{x_b + v_c \cdot \cot g\alpha}{2} = \sqrt{t_a^{\ 2} - \left(\frac{v_c}{2}\right)^2}$$

$$x_b + v_c \cdot \cot g\alpha = 2 \cdot \sqrt{t_a^{\,2} - \left(\frac{v_c}{2}\right)^2}$$

$$x_b = 2 \cdot \sqrt{t_a^{\,2} - \left(\frac{v_c}{2}\right)^2} - v_c \cdot \cot g\alpha$$

Tím jsme získali x-ovou souřadnici bodu B, tedy bod B má souřadnice $B\left[2 \cdot \sqrt{t_a^{\,2} - \left(\frac{v_c}{2}\right)^2} - v_c \cdot \cot g\alpha; 0\right]$.

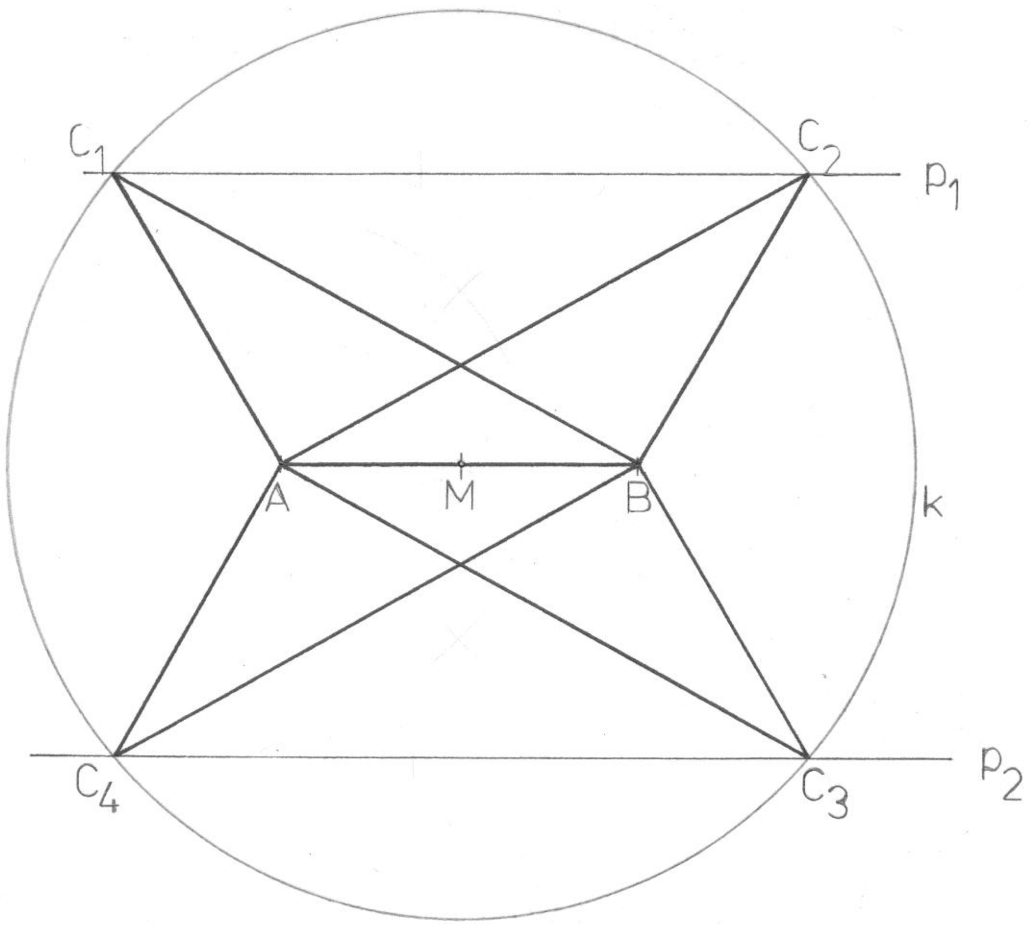
4. Sestrojte trojúhelník, je-li dána velikost jedné jeho strany, příslušné výšky a těžnice.



Obrázek 41: Náčrtek úlohy 4

ROZBOR: Předpokládejme, že úloha má aspoň jedno řešení. Je to totiž úloha nepolohová, je třeba nejprve umístit některou úsečku, např. $AB = c$. Pak zbývá jeden neznámý bod, a to vrchol C. Množinami všech bodů, které mají od přímky AB vzdálenost v_c, jsou dvě rovnoběžky p_1, p_2. Zvolme bod M jako střed úsečky AB. Pak množina všech bodů, která má od bodu M vzdálenost t_c, je kružnice $k(M; t_c)$.

KONSTRUKCE:



Obrázek 42: Konstrukce úlohy 4

ZÁPIS:

1. zadání: $c = AB$, v_c, t_c
2. $\leftrightarrow p_1, \leftrightarrow p_2$; $p_1 \parallel c$, $p_2 \parallel c$, $|cp_1| = v_c$, $|cp_2| = v_c$
3. M; $M \in c$, $|AM| = |MB|$
4. k; $k(M; t_c)$
5. C_1, C_2, C_3, C_4; $\{C_1\} \in p_1 \cap k$, $\{C_2\} \in p_1 \cap k$, $\{C_3\} \in p_2 \cap k$, $\{C_4\} \in p_2 \cap k$
6. ΔABC_1, ΔABC_2, ΔABC_3, ΔABC_4

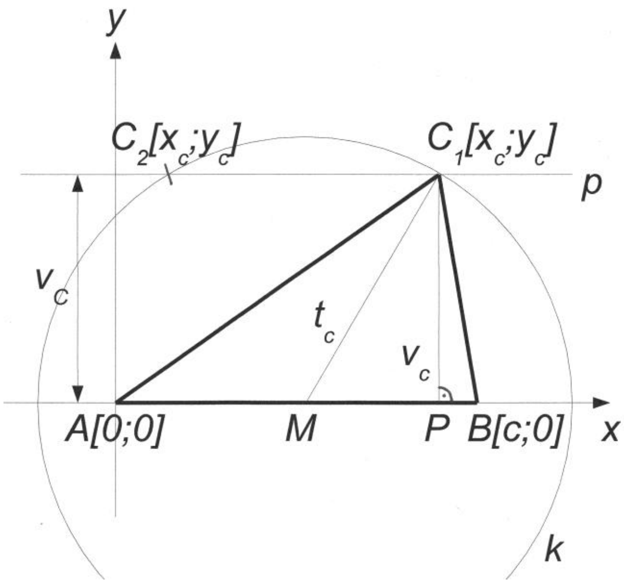
DISKUSE: Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků kružnice k s přímkami p_1 a p_2. Je-li:

a) $v_c > t_c$, jsou přímky p_1, p_2 nesečnami kružnice k, úloha nemá žádné řešení,

b) $v_c = t_c$, jsou přímky p_1, p_2 tečnami kružnice k, úloha má jedno řešení (rovnoramenný trojúhelník),

c) $v_c < t_c$, jsou přímky p_1, p_2 sečnami kružnice k, úloha má podle úmluvy dvě různá řešení, která jsou osově souměrná podle osy úsečky AB: ΔABC_1 a ΔABC_2 ($\Delta ABC_3 \cong \Delta ABC_2$, $\Delta ABC_4 \cong \Delta ABC_1$).

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 43: Analytické řešení úlohy 4

Délka úsečky AB je rovna délce strany c. Nechť bod P je patou výšky v_c a bod M je středem strany AB. Bod M má tedy souřadnice $M = \left[\frac{c}{2};0\right]$.

Průsečík přímky p s kružnicí k je bod C. Jak je již vidět z obrázku, tyto průsečíky jsou dva – C_1, C_2, a jejich y-ová souřadnice je v_c. Kružnice k má střed v bodě M a poloměr t_c. Pak můžeme psát:

rovnice kružnice k: $(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = t_c^{\,2}$

rovnice přímky p: $y = v_c$

$$\{C\} \in p \cap k$$

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = t_c^{\,2}$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{c}{2} + \frac{c^2}{4} + y^2 = t_c^{\,2}$$

$$x^2 - xc + \frac{c^2}{4} + v_c^{\,2} - t_c^{\,2} = 0,$$

což je kvadratická rovnice.

$$D = b^2 - 4ac = c^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{c^2}{4} + v_c^{\,2} - t_c^{\,2}\right) = c^2 - c^2 - 4v_c^{\,2} + 4t_c^{\,2} = 4 \cdot \left(t_c^{\,2} - v_c^{\,2}\right)$$

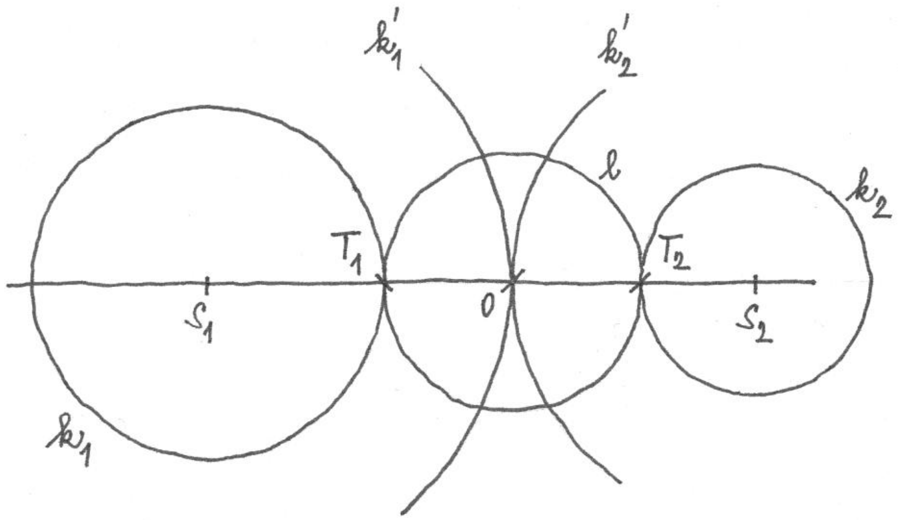
$$\sqrt{D} = \sqrt{4 \cdot \left(t_c^{\,2} - v_c^{\,2}\right)} = 2 \cdot \sqrt{t_c^{\,2} - v_c^{\,2}}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{c \pm 2 \cdot \sqrt{t_c^{\,2} - v_c^{\,2}}}{2}$$

Tím jsme dostali x-ové souřadnice bodu C.

Tedy $C_1\left[\dfrac{c+2\cdot\sqrt{t_c^{\,2}-v_c^{\,2}}}{2};v_c\right]$, $C_2\left[\dfrac{c-2\cdot\sqrt{t_c^{\,2}-v_c^{\,2}}}{2};v_c\right]$.

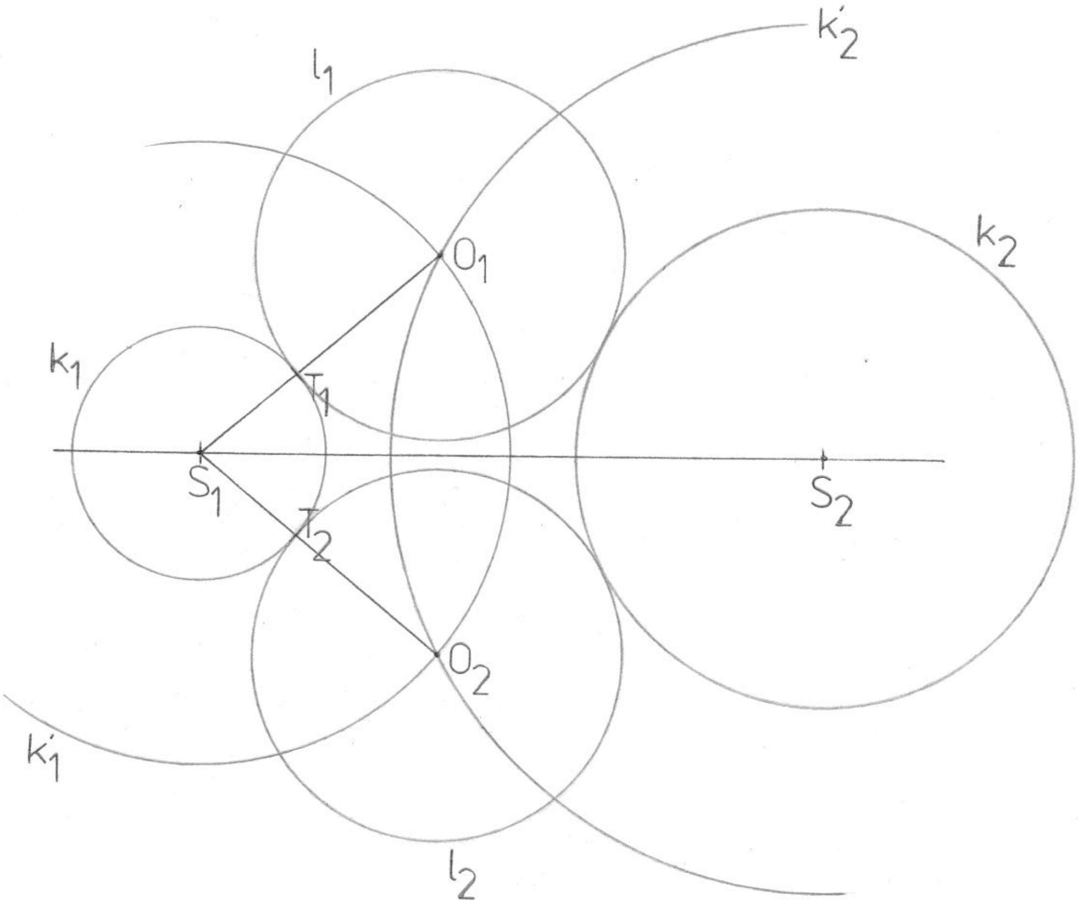
5. Sestrojte kružnici, která má daný poloměr *r* a dotýká se dvou daných kružnic $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, a to obou vně.



Obrázek 44: Náčrtek úlohy 5

<u>ROZBOR:</u> Předpokládejme, že tato polohová úloha má alespoň jedno řešení. Množina všech středů kružnic, která má daný poloměr r a dotýká se dané kružnice k_1 vně, je kružnice k_1' s ní soustředná, která má střed v bodě S_1 a poloměr $(r_1 + r)$. Množina všech středů kružnic, která má daný poloměr r a dotýká se dané kružnice k_2 vně, je kružnice k_2' s ní soustředná, která má střed v bodě S_2 a poloměr $(r_2 + r)$. Pak hledaný střed O kružnice l, která se daných kružnic k_1 a k_2 dotýká vně, je průsečík kružnic $k_1'(S_1; r_1 + r)$, $k_2'(S_2; r_2 + r)$.

KONSTRUKCE:



Obrázek 45: Konstrukce úlohy 5

ZÁPIS:

1. zadání: k_1, k_2, r
2. k_1'; $k_1'(S_1; r_1 + r)$
3. k_2'; $k_2'(S_2; r_2 + r)$
4. O_1, O_2; $\{O_1\} \in k_1' \cap k_2'$, $\{O_2\} \in k_1' \cap k_2'$
5. S_1O
6. S_2O
7. T_1; $\{T_1\} \in k_1 \cap S_1O$
8. T_2; $\{T_2\} \in k_2 \cap S_2O$
9. l_1; $l_1(O_1, |O_1T_1|)$
10. l_2; $l_2(O_2; |O_2T_2|)$

DISKUSE: Úloha může mít dvě, jedno nebo žádné řešení podle polohy středů S_1, S_2 a velikosti poloměrů r_1, r_2, r.

Tabulka 1: Počet řešení úlohy 5

$S_1 \neq S_2$	
$\lvert S_1S_2\rvert > \lvert r_1' + r_2'\rvert$	nemá řešení
$\lvert S_1S_2\rvert = \lvert r_1' + r_2'\rvert$	jedno řešení
$\lvert S_1S_2\rvert < \lvert r_1' + r_2'\rvert$	dvě řešení

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ

Bod S_1 umístíme do počátku soustavy souřadnic, bod S_2 umístíme na ose x ve vzdálenosti menší než ($r_1' + r_2'$) od bodu S_1. Souřadnice bodů S_1, S_2 jsou tedy $S_1[0; 0]$, $S_2[x_s; 0]$. Podle tabulky by měla mít úloha dvě řešení. Pokusme se tedy tento příklad vyřešit pomocí analytické geometrie. Hledáme bod $O[x_o; y_o]$, který je průsečíkem kružnic k_1', k_2'.

$$k_1(S_1;r_1),\ k_2(S_2;r_2)$$

$$k_1'(S_1;r+r_1),\ k_2'(S_2;r+r_2)$$

Pak $\{O\} = k_1' \cap k_2'$

Napišme rovnice obou kružnic k_1', k_2' a soustavu dvou rovnic o dvou neznámých postupně upravujeme:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(r_1+r)^2$$
$$(x-x_s)^2+(y-0)^2=(r_2+r)^2$$

$$x^2+y^2=r_1^{\ 2}+2rr_1+r^2$$
$$x^2-2xx_s+x_s^{\ 2}+y^2=r_2^{\ 2}+2rr_2+r^2$$

Druhou rovnici vynásobíme (-1) a sečteme s rovnicí první. Pak dostáváme:

$$2xx_s-x_s^{\ 2}=r_1^{\ 2}+2rr_1-r_2^{\ 2}-2rr_2$$

$$x_o=\frac{x_s^{\ 2}+r_1^{\ 2}+2rr_1-r_2^{\ 2}-2rr_2}{2x_s}$$

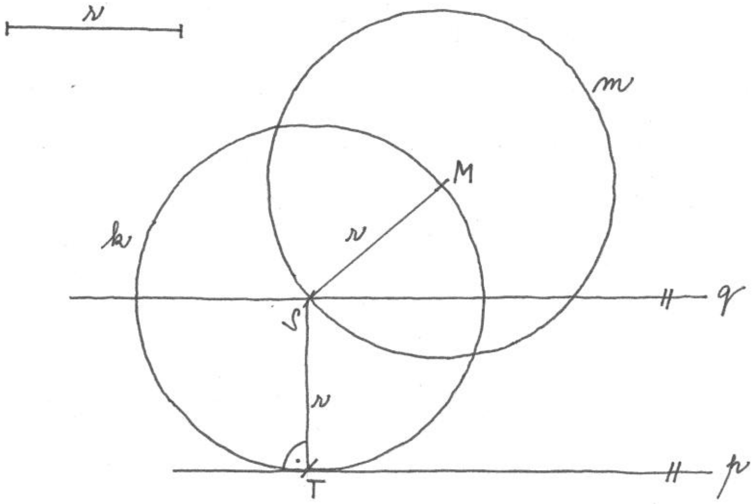
Tím jsme dostali x-ovou souřadnici bodu O. Teď nám zbývá zjistit y-ovou souřadnici bodu O. Tu získáme z jedné z rovnic soustavy:

$$x^2+y^2=(r_1+r)^2 \Rightarrow y^2=(r_1+r)^2-x^2$$

$$y_o=\pm\sqrt{(r_1+r)^2-\left(\frac{x_s^{\ 2}+r_1^{\ 2}+2rr_1-r_2^{\ 2}-2rr_2}{2x_s}\right)^2}$$

Pak souřadnice hledaných středů kružnic l_1, l_2 jsou $O_1[x_o; y_o]$, $O_2[x_o; -y_o]$.

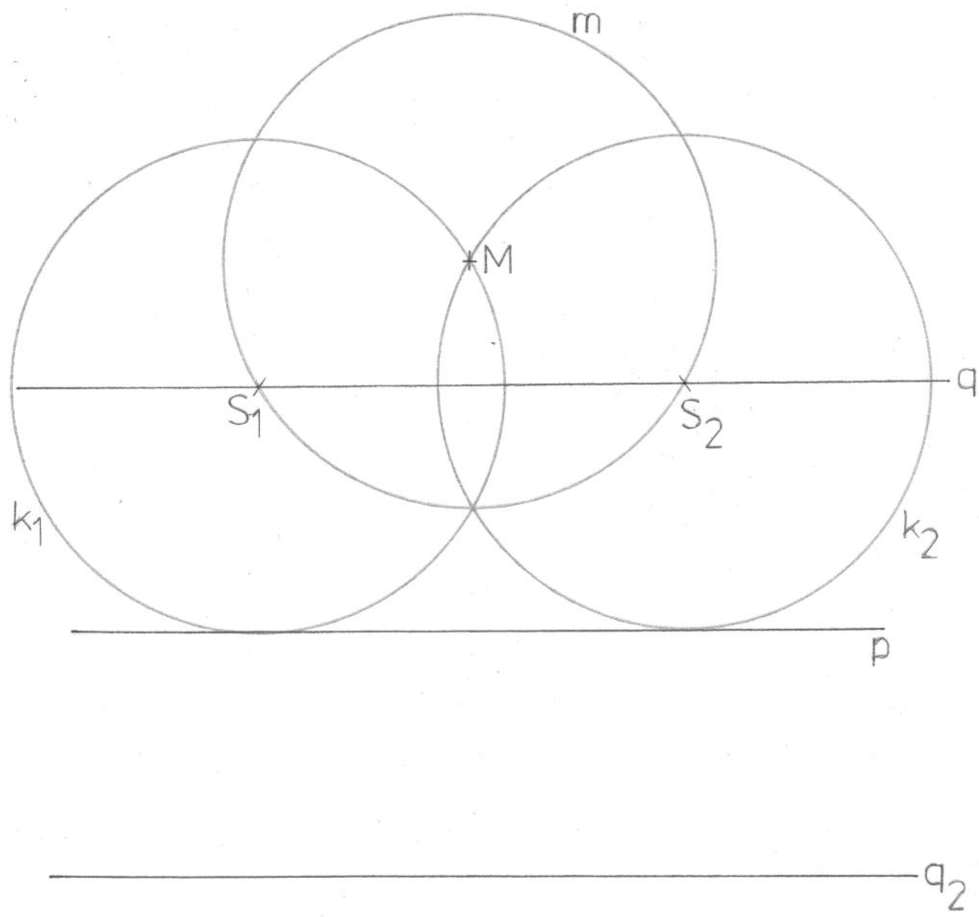
6. Sestrojte kružnici, která má daný poloměr *r*, dotýká se dané přímky *p* a prochází daným bodem *M*, který leží mimo přímku *p*.



Obrázek 46: Náčrtek úlohy 6

<u>ROZBOR:</u> Uvažujme, že úloha má aspoň jedno řešení. Je to úloha polohová. Neznáme pouze polohu jediného bodu, a to středu *S* hledané kružnice *k*. Množina všech středů kružnic, která má od přímky *p* vzdálenost *r*, jsou dvě rovnoběžky q_1, q_2. Množina všech středů kružnic, která má od bodu *M* vzdálenost *r*, je kružnice *m*(*M*; *r*). Průnikem těchto dvou množin je střed *S* hledané kružnice *k*.

KONSTRUKCE:



Obrázek 47: Konstrukce úlohy 6

ZÁPIS:

1. zadání: r, p, M ($M \notin p$)
2. $\leftrightarrow q_1, \leftrightarrow q_2$; $q_1 \parallel p$, $q_2 \parallel p$, $|q_1p| = r$, $|q_2p| = r$
3. m; $m(M; r)$
4. S_1, S_2; $\{S_1\} \in q_1 \cap m$, $\{S_2\} \in q_1 \cap m$
5. k_1; $k_1(S_1; r)$
6. k_2; $k_2(S_2; r)$

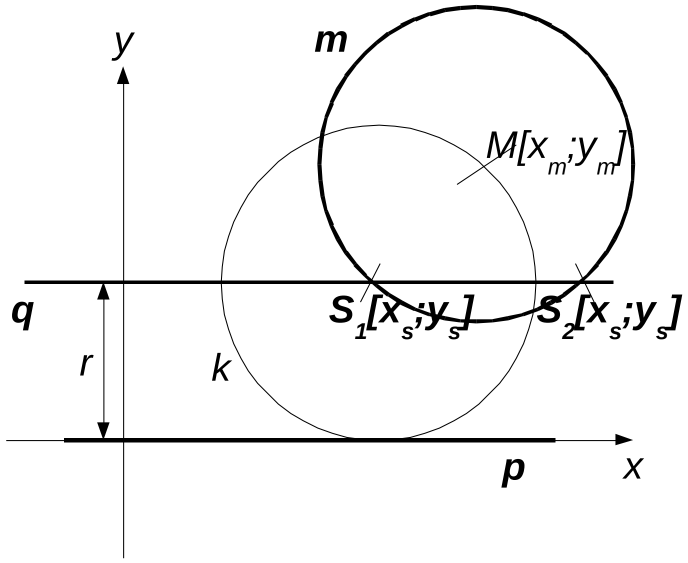
DISKUSE: Počet řešení této úlohy závisí na vzdálenosti bodu M od přímky p. Potom nastávají tři možnosti:

a) *(viz konstrukce)* Bod M má od přímky p vzdálenost menší než $2r$. Potom přímka q_1 se stává sečnou kružnice m. Dostáváme dva průsečíky přímky q_1 a kružnice m, tyto body označíme S_1, S_2, které jsou středy hledaných kružnic k_1, k_2. Poloměr těchto kružnic je velikost úsečky SM. Úloha má v tomto případě dvě řešení.
b) Bod M má od přímky p vzdálenost rovnu $2r$. Potom přímka q_1 se stává tečnou ke kružnici m. Dostaneme pouze jeden průsečík S přímky q_1 s kružnicí m, který je

hledaným středem kružnice k. Bod S je tečný bod kružnice m. Úloha má v tomto případě jediné řešení.

c) Bod M má od přímky p vzdálenost větší než $2r$. Takže přímka q_1 se stává nesečnou kružnice m a nevznikne žádný průsečík přímky q_1 s kružnicí m. Hledaný bod S tedy neexistuje a úloha v tomto případě nemá žádné řešení.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 48: Analytické řešení úlohy 6

Hledaný bod S (střed hledané kružnice k) je tedy průsečíkem přímky q a kružnice m, která má střed v bodě $M[x_m; y_m]$ a poloměr r. Podle diskuse, jestliže bod M leží ve vzdálenosti menší než $2r$ od přímky p, pak má úloha dvě řešení. Napišme si tedy rovnici přímky q a rovnici kružnice m:

$$m: (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$
$$q: y = r$$

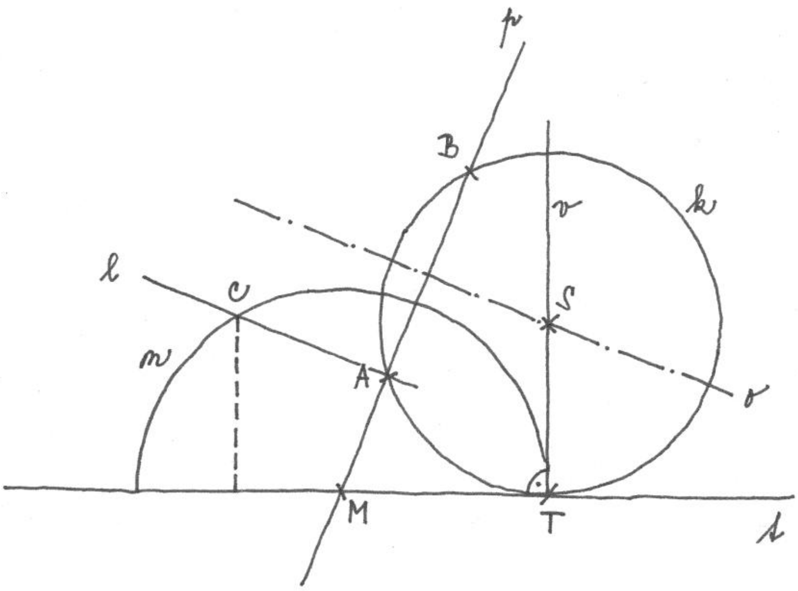
$$\{S\} = m \cap q$$
$$x^2 - 2xx_m + x_m{}^2 + y^2 - 2yy_m + y_m{}^2 = r^2$$
$$x^2 - 2xx_m + x_m{}^2 + r^2 - 2ry_m + y_m{}^2 = r^2$$
$$x^2 - 2xx_m + x_m{}^2 + y_m{}^2 - 2ry_m = 0,$$

což je kvadratická rovnice.

$$D = b^2 - 4ac = (-2x_m)^2 - 4 \cdot \left(x_m{}^2 + y_m{}^2 - 2ry_m\right) = 4x_m{}^2 - 4x_m{}^2 - 4y_m{}^2 + 8ry_m$$
$$D = 4y_m \cdot (2r - y_m)$$
$$\sqrt{D} = \sqrt{4y_m \cdot (2r - y_m)} = 2 \cdot \sqrt{y_m \cdot (2r - y_m)}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2x_m \pm 2 \cdot \sqrt{y_m \cdot (2r - y_m)}}{2} = x_m \pm \sqrt{y_m \cdot (2r - y_m)}$$

Pak hledané středy mají souřadnice: $S_1[x_1; r]$, $S_2[x_2; r]$.

7. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma danými body *A, B* a dotýká se dané přímky *t*. Žádný z bodů *A, B* neleží na přímce *t*.

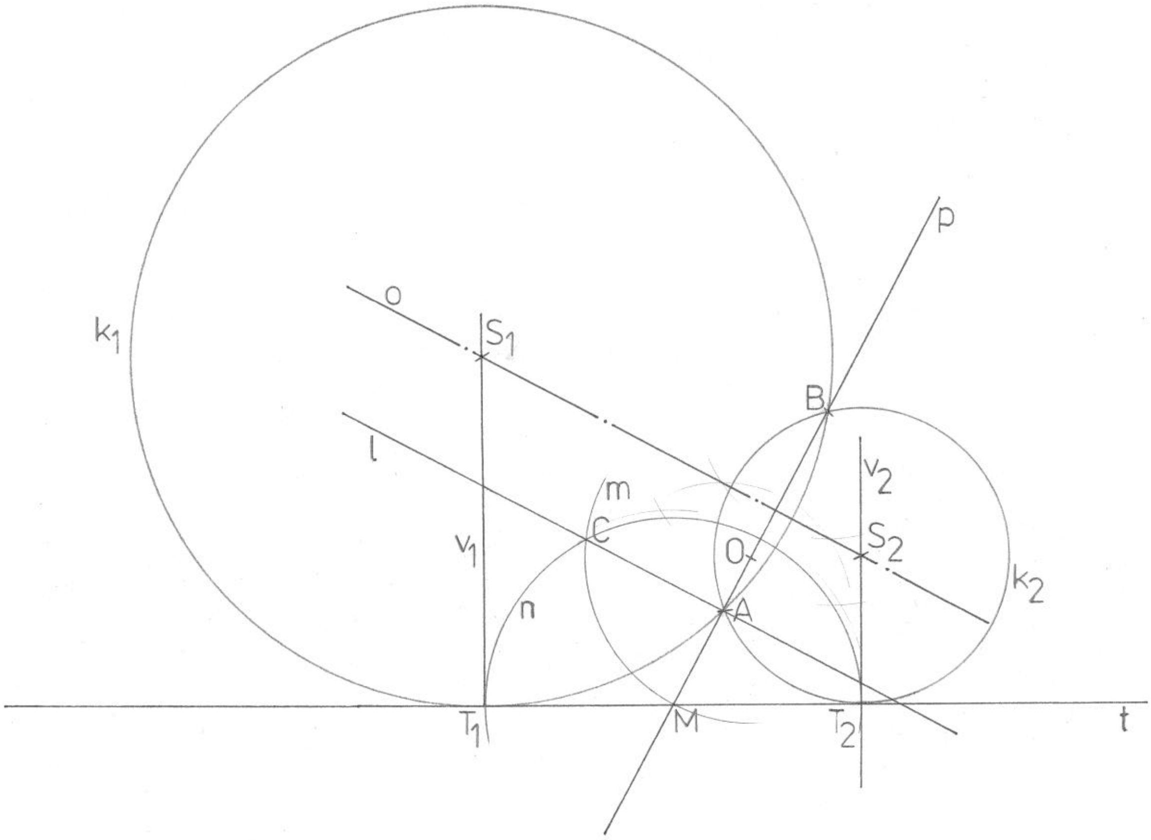


Obrázek 49: Náčrtek úlohy 7

ROZBOR: U této úlohy musíme nejprve zjišťovat určité vstupní podmínky, abychom mohli předpokládat, že daná úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je polohová. Je jisté, že pokud by body *A, B* ležely na přímce *t*, pak by úloha neměla žádné řešení. Kdyby na přímce *t* ležel právě jeden z bodů *A*, *B*, pak se jedná o řešení, o kterém se zabýváme v úloze č. 1. Na začátek musíme ještě zvážit, že body *A, B* musí ležet ve stejné polorovině určené přímkou *t*.

Přímka *t* je tedy tečnou hledané kružnice, má s ní společný jeden bod *T*. Tento bod *T* nalezneme s využitím **mocnosti bodu ke kružnici**. Pak množina všech středů kružnic, která prochází body *A* a *B*, je osa úsečky *AB*. Množina všech středů kružnic, která se dotýká přímky *t* v bodě *T,* je kolmice k přímce *t* sestrojená v bodě *T*. Průsečíkem těchto množin bodů je střed hledané kružnice.

KONSTRUKCE:



Obrázek 50: Konstrukce úlohy 7

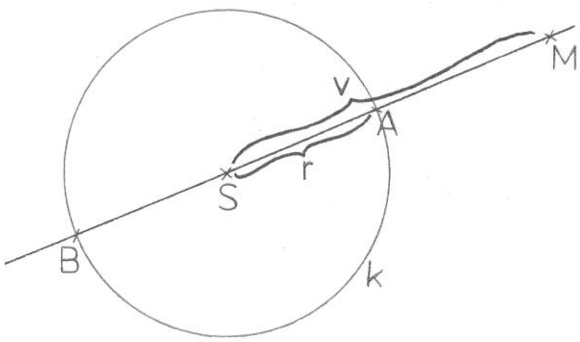
ZÁPIS:

1. zadání: t, A, B
2. $\leftrightarrow p; A \in p, B \in p$
3. $M; \{M\} \in t \cap p$
4. $O; O \in MB, |MO| = |OB|$
5. $\leftrightarrow l; l \perp p, A \in l$
6. $m; m(O; |OM|)$
7. $C; \{C\} \in l \cap m$
8. $n; n(M; |CM|)$
9. $T_1, T_2; \{T_1\} \in t \cap n, \{T_2\} \in t \cap n$
10. osa o; o je osa úsečky AB
11. $\leftrightarrow v_1; v_1 \perp t, T_1 \in v_1$
12. $S_1; \{S_1\} \in o \cap v_1$
13. $k_1; k_1(S_1; |S_1T_1|)$
14. $\leftrightarrow v_2; v_2 \perp t, T_2 \in v_2$
15. $S_2; \{S_2\} \in v_2 \cap o$
16. $k_2; k_2(S_2; |S_2T_2|)$

DISKUSE: Protože kružnice n protne přímku t ve dvou bodech, vzniknou dva dotykové body T_1, T_2. Potom úloha má dvě řešení. Ovšem může nastat zvláštní případ, a to když úsečka AB je rovnoběžná s přímkou t. Pak střed S hledané kružnice leží na ose úsečky AB. Ta protne přímku t v jediném bodě T. Lze tedy sestrojit jednu kružnici opsanou trojúhelníku ABT, takže úloha má právě jedno řešení. Hledaný bod S je průsečík osy úsečky AB a osy úsečky AT.

MOCNOST BODU KE KRUŽNICI

Definice: V rovině je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M. Vzdálenost bodu M od středu S kružnice k je v. Číslo $m = v^2 - r^2$ nazýváme mocností bodu M ke kružnici k.

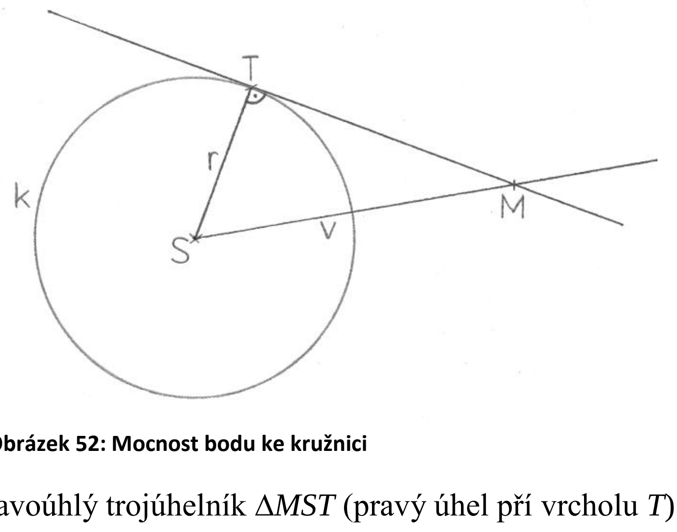


Obrázek 51: Mocnost bodu ke kružnici

$$|MA| = |v - r|$$

$$|MB| = v + r$$

$$|MA| \cdot |MB| = (v - r) \cdot (v + r) = v^2 - r^2 = m(M; k)$$



Obrázek 52: Mocnost bodu ke kružnici

Je dán pravoúhlý trojúhelník ΔMST (pravý úhel pří vrcholu T) a platí Pythagorova věta:

$$|MT|^2 + |ST|^2 = |SM|^2$$

$$|MT|^2 = |SM|^2 - |ST|^2 = v^2 - r^2 = m(M; k)$$

$$m(M; k) = |MT|^2$$

a) $m = 0$ … bod M leží na kružnici k

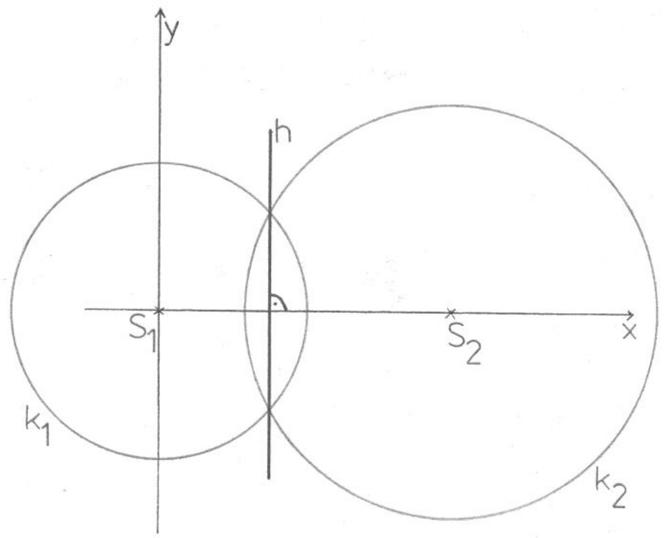
b) $m > 0$ … bod M leží vně kružnice k

c) $m < 0$ … bod M leží uvnitř kružnice k

Věta: Množinou všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím $k(S; r)$ a $k'(S'; r')$, je přímka h kolmá na přímku SS'.

Definice: Množina všech bodů, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost, se nazývá chordála.

Chordálu kružnic $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ můžeme analyticky vyjádřit:



Obrázek 53: Mocnost bodu ke kružnici

$S_1[m_1; n_1] = [0; 0]$

$S_2[m_2; n_2] = [x_s; 0]$

$k_1 : (x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$

$k_2 : (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2$

$$m_1 = m_2$$

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 - r_1^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 - r_2^2$$

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - x_s)^2 + y^2 - r_2^2$$

$$x^2 - r_1^2 = x^2 - 2x \cdot x_s + x_s^2 - r_2^2$$

$$2x \cdot x_s = x_s^2 + r_1^2 - r_2^2$$

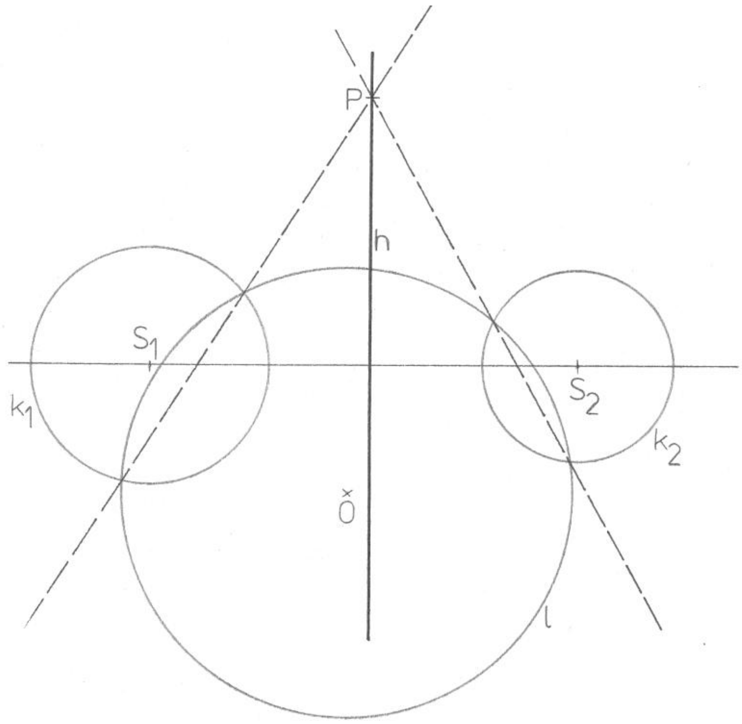
$$h : x = \frac{x_s^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot x_s}$$

Chordála je kolmá na spojnici středů kružnic:

- Chordála dvou protínajících se kružnic je přímka, která prochází průsečíky obou kružnic.
- Chordála dvou dotýkajících se kružnic je společná tečna obou kružnic.
- Soustředné kružnice chordálu nemají.

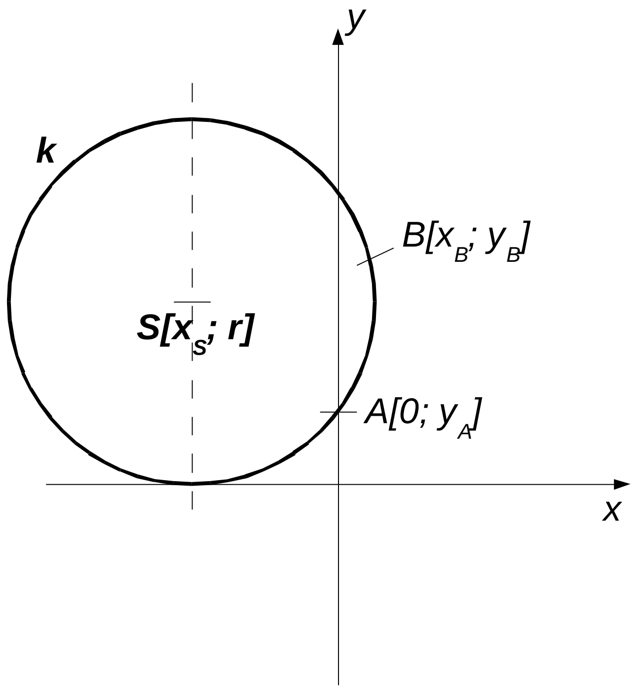
Chordála dvou kružnic, které nemají společný bod:

a) Zvolíme pomocnou kružnici, která protíná obě kružnice a jejíž střed neleží na spojnici středů daných kružnic.
b) Sestrojíme chordály pomocné kružnice a obou zadaných kružnic.
c) Chordály se protnou v potenčním středu P všech tří kružnic.
d) Hledaná chordála prochází tímto potenčním středem P kolmo ke spojnici středů daných kružnic.



Obrázek 54: Mocnost bodu ke kružnici

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 55: Analytické řešení úlohy 7

Nechť tečna t prochází osou x. Pak hledaná kružnice k, která má střed v bodě $S[x_S; r]$ a poloměr r, má rovnici: $(x - x_S)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

Bod A náleží kružnici k, tzn.:

$$A \in k$$

$$(0 - x_S)^2 + (y_A - r)^2 = r^2$$

$$x_S^{\ 2} + y_A^{\ 2} - 2y_A \cdot r + r^2 = r^2$$

$$2y_A \cdot r = x_S^{\ 2} + y_A^{\ 2}$$

$$r = \frac{x_S^{\ 2} + y_A^{\ 2}}{2y_A}$$

Stejně tak i bod B náleží kružnici k, tedy:

$$B \in k$$

$$(x_B - x_S)^2 + (y_B - r)^2 = r^2$$

$$x_B^{\ 2} - 2x_B x_S + x_S^{\ 2} + y_B^{\ 2} - 2y_B \cdot r + r^2 = r^2$$

$$x_B^{\ 2} - 2x_B x_S + x_S^{\ 2} + y_B^{\ 2} - 2y_B \cdot \left(\frac{x_S^{\ 2} + y_A^{\ 2}}{2y_A} \right) = 0$$

$$x_B^{\ 2} - 2x_B x_S + x_S^{\ 2} + y_B^{\ 2} - \frac{y_B}{y_A}\left(x_S^{\ 2} + y_A^{\ 2}\right) = 0$$

$$x_S^{\ 2} \cdot \left(1 - \frac{y_B}{y_A}\right) - 2x_B x_S + x_B^{\ 2} + y_B^{\ 2} - y_A y_B = 0,$$

což je kvadratická rovnice s neznámou x_S.

$$D = b^2 - 4ac = 4 \cdot x_B{}^2 - 4 \cdot \left(1 - \frac{y_B}{y_A}\right) \cdot \left(x_B{}^2 + y_B{}^2 - y_A y_B\right) =$$

$$= 4 \cdot x_B{}^2 - 4 \cdot \left(x_B{}^2 + y_B{}^2 - y_A y_B - x_B{}^2 \cdot \frac{y_B}{y_A} - \frac{y_B{}^3}{y_A} + y_B{}^2\right) =$$

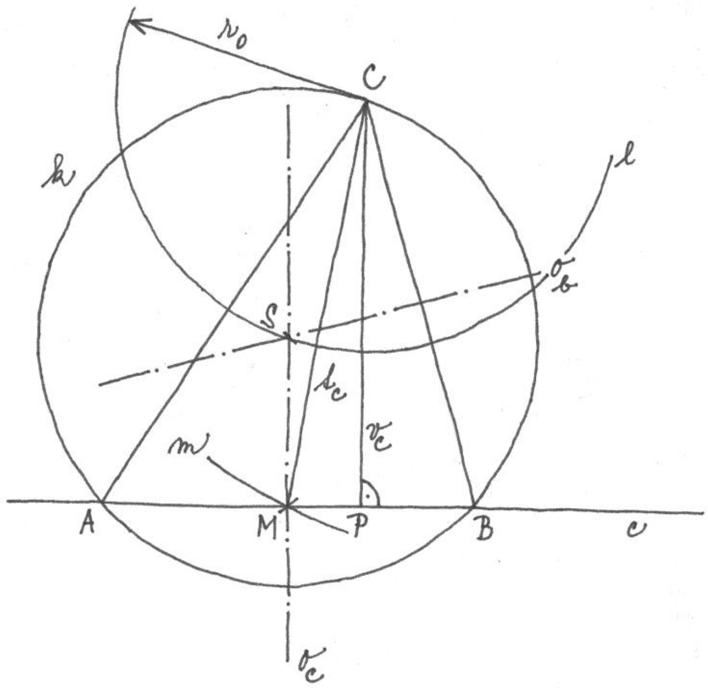
$$= 4 \cdot \left(y_A y_B + x_B{}^2 \cdot \frac{y_B}{y_A} + \frac{y_B{}^3}{y_A} - 2 y_B{}^2\right)$$

$$x_{S_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2x_B \pm 2 \cdot \sqrt{y_A y_B + x_B{}^2 \cdot \frac{y_B}{y_A} + \frac{y_B{}^3}{y_A} - 2 \cdot y_B{}^2}}{2 \cdot \left(1 - \frac{y_B}{y_A}\right)} =$$

$$= \frac{x_B \pm \sqrt{y_A y_B + x_B{}^2 \cdot \frac{y_B}{y_A} + \frac{y_B{}^3}{y_A} - 2 y_B{}^2}}{1 - \frac{y_B}{y_A}}$$

Pak x-ovou souřadnici bodu S dosadíme do rovnice pro výpočet poloměru r.

8. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána výška v_c, těžnice t_c a poloměr r_o kružnice opsané trojúhelníku.

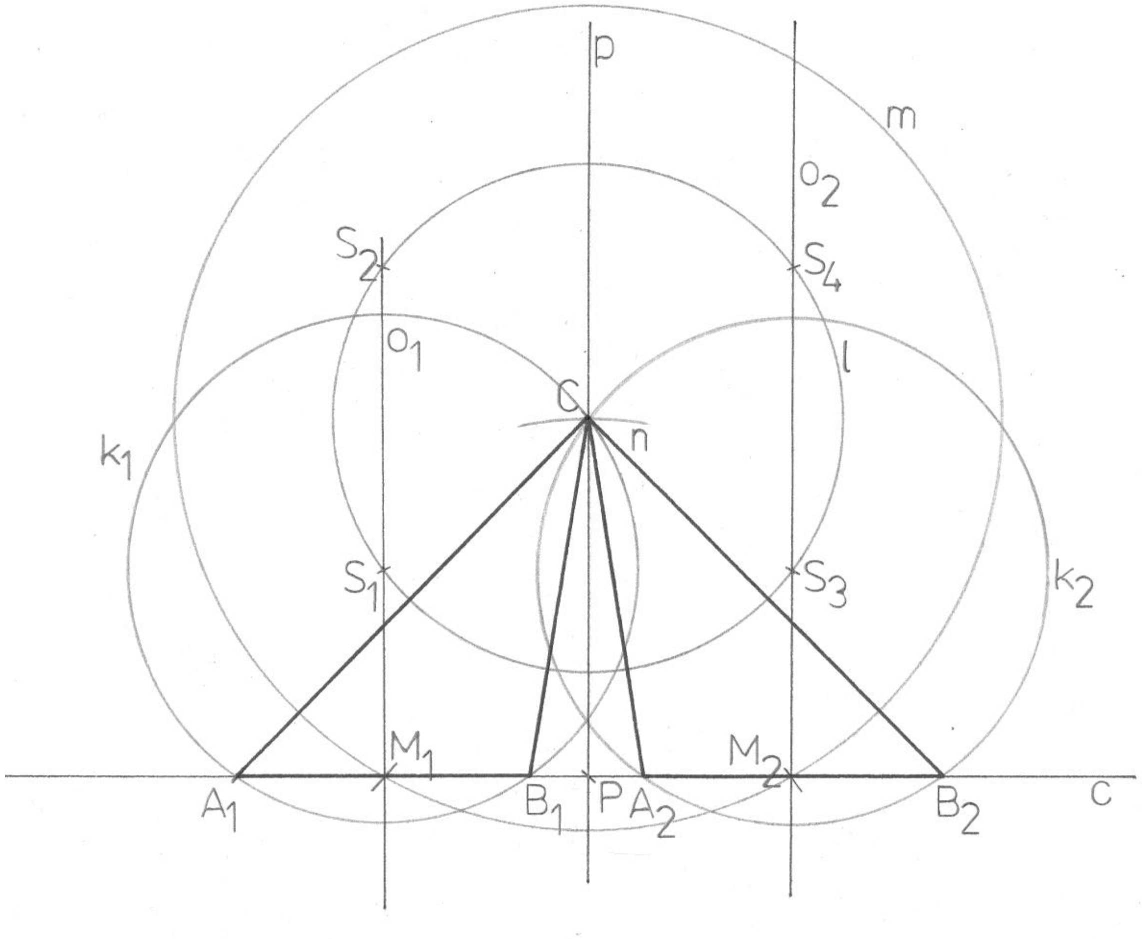


Obrázek 56: Náčrtek úlohy 8

ROZBOR: Předpokládáme, že úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je nepolohová s neznámými všemi vrcholy trojúhelníka včetně středu kružnice opsané. Víme, že střed kružnice opsané dostaneme jako průsečík os stran, a současně tato kružnice pak prochází všemi třemi vrcholy trojúhelníka *ABC*. Úlohu převedeme na polohovou tak, že si v rovině zvolíme přímku *c*, na ní libovolný bod *P*, který je patou výšky v_c. Bod *C* pak leží na kolmici *p* k přímce *c* v bodě *P*, velikost úsečky *PC* je rovna velikosti v_c. Pak sestrojíme kružnici *l*, která má střed v bodě *C*, a její poloměr je r_0. Pak na této kružnici *l* musí ležet střed *S* kružnice opsané.

Množina všech bodů, která má od bodu *C* vzdálenost t_c, je kružnice $m(C;\ t_c)$. Průsečík této kružnice *m* s přímkou *c* je bod *M*, který je středem úsečky *AB*. Množina všech středů kružnic, která prochází oběma body *A*, *B*, je osa úsečky *AB*. To znamená, že sestrojíme kolmici *o* k přímce *c*, která prochází bodem *M*. Hledaný střed *S* kružnice opsané je pak průsečík přímky *o* a kružnice *l*. Pak průsečíky sestrojené opsané kružnice *k* a přímky *c* jsou zbývajícími vrcholy *A*, *B* trojúhelníka *ABC*.

KONSTRUKCE:



Obrázek 57: Konstrukce úlohy 8

ZÁPIS:

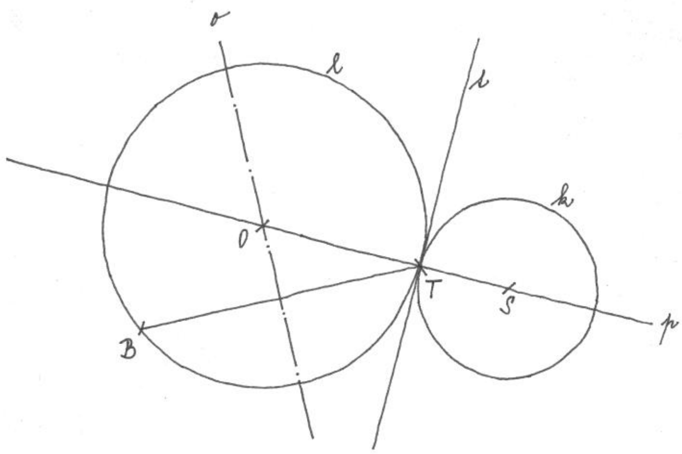
1. zadání: v_c, t_c, r_o
2. $\leftrightarrow c$, *c* je libovolná přímka v rovině
3. P; $P \in c$, *P* je libovolný bod na přímce *c*
4. $\leftrightarrow p$; $p \perp c$, $P \in p$

5. n; $n(P; v_c)$
6. C; $\{C\} \in p \cap n$
7. m; $m(C; t_c)$
8. M_1, M_2; $\{M_1\} \in c \cap m$, $\{M_2\} \in c \cap m$
9. $\leftrightarrow o_1$; $o_1 \perp c$, $M_1 \in o_1$
10. $\leftrightarrow o_2$; $o_2 \perp c$, $M_2 \in o_2$
11. l; $l(C; r_o)$
12. S_1, S_2; $\{S_1\} \in l \cap o_1$, $\{S_2\} \in l \cap o_1$
13. S_3, S_4; $\{S_3\} \in l \cap o_2$, $\{S_4\} \in l \cap o_2$
14. k_1; $k_1(S_1; r_o)$
15. k_2; $k_2(S_3; r_o)$
16. A_1,B_1; $\{A_1\} \in k_1 \cap c$, $\{B_1\} \in k_1 \cap c$
17. A_2, B_2; $\{A_2\} \in k_2 \cap c$, $\{B_2\} \in k_2 \cap c$
18. ΔA_1B_1C, ΔA_2B_2C

DISKUSE: V našem případě má úloha dvě řešení. Podmínkou takového řešení je, že velikost těžnice t_c je větší než velikost výšky v_c. Kdyby tomu tak nebylo, pak by úloha neměla žádné řešení. Středy S_2, S_4 v naší úloze neuvažujeme, neboť kdybychom zkonstruovali opsanou kružnici v těchto bodech, pak by tato kružnice neprotnula přímku c, a tak by nevznikly oba vrcholy A, B trojúhelníka ABC. Další podmínkou řešení je, že poloměr r_o kružnice opsané musí být větší než velikost úsečky QC, kde bod Q je průsečík přímky o s osou úsečky MC, tedy s osou těžnice t_c. Pokud by tato velikost úsečky QC byla menší nebo rovna, pak by nevznikly body A, B, a úloha by neměla opět žádné řešení.

9. Sestrojte kružnici *l*, která se dotýká dané kružnice *k*(*S; r*) v jejím daném bodě *T* a prochází dalším daným bodem *B*.

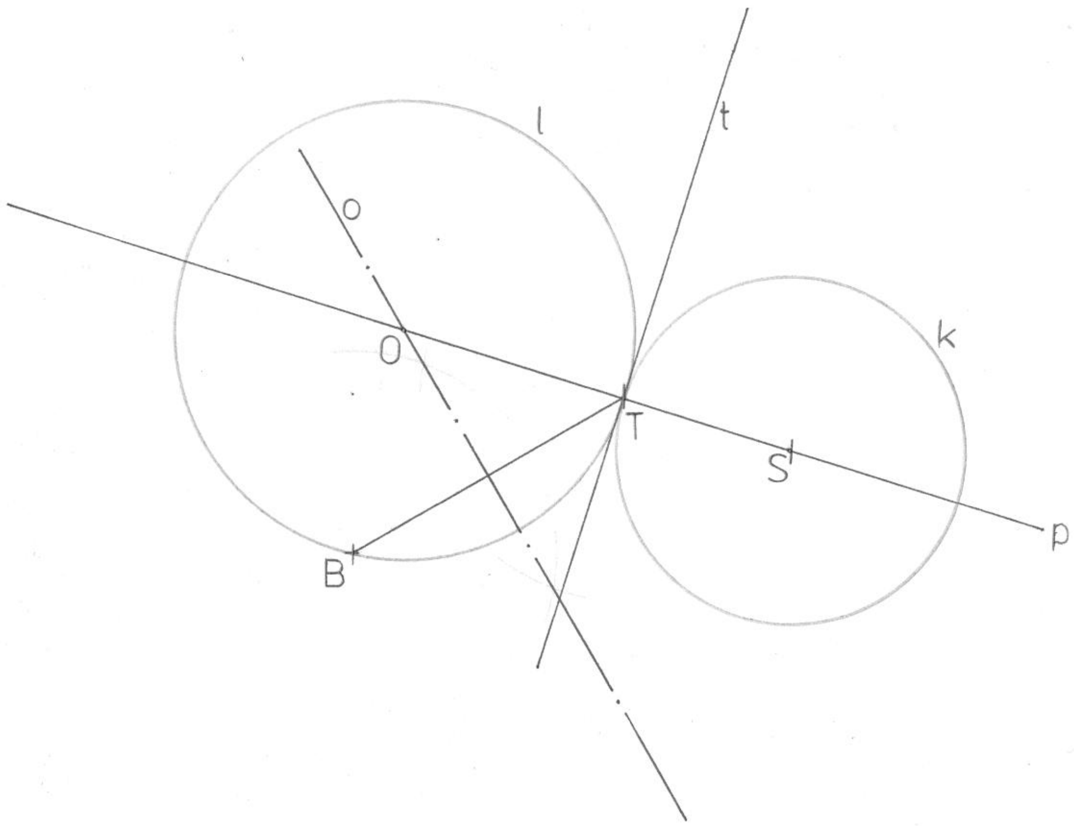
Pappova úloha typu BBk



Obrázek 58: Náčrtek úlohy 9

ROZBOR: Uvažujme, že úloha má aspoň jedno řešení. Je to úloha polohová s jedním neznámým bodem, a to středem hledané kružnice l. Uvažujme řešení úlohy, kdy bod B leží vně kružnice *k*. Na této kružnici si zvolíme libovolně bod *T*, který je pak současně tečným bodem kružnice *k*, tak hledané kružnice *l*. Množina všech středů kružnic, na které leží body *T*, *S* a hledaný střed *O* kružnice *l*, je přímka *p*, která prochází právě těmito třemi body. Pak přímka *t* sestrojená jako kolmice k přímce *p* v bodě *T*, je společnou tečnou pro obě kružnice. Množina všech středů kružnic, jež prochází body *B, T,* je osa *o* úsečky *BT*. Průsečík těchto množin daných bodů je hledaný střed kružnice *l*.

KONSTRUKCE:



Obrázek 59: Konstrukce úlohy 9

ZÁPIS:

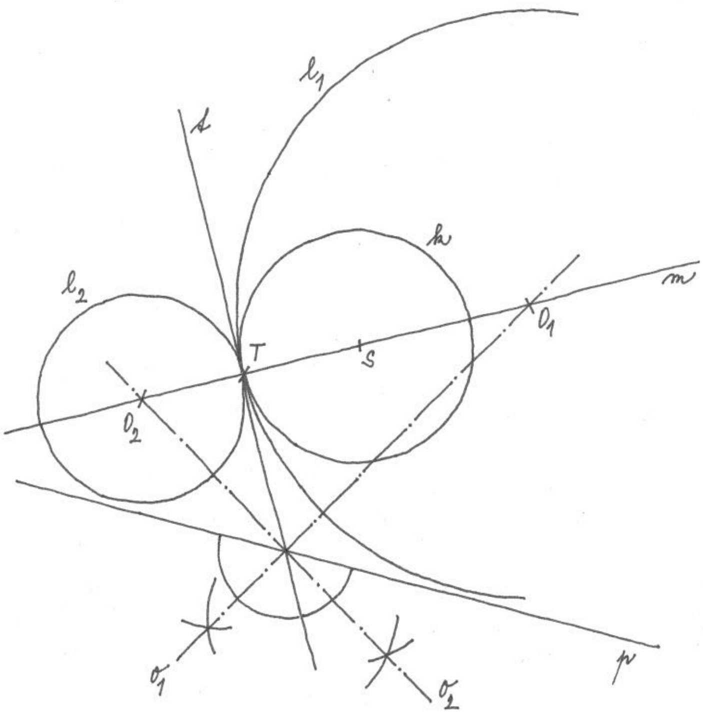
1. zadání: $k(S; r)$, $T \in k$, B
2. $\leftrightarrow p$; $S \in p$, $T \in p$
3. $\leftrightarrow t$; $t \perp p$, $T \in t$
4. BT
5. osa o; osa o úsečky BT
6. O; $\{O\} \in p \cap o$
7. l; $l(O; |OT|)$

DISKUSE: V našem případě hledaný střed *O* je průsečíkem dvou přímek (různoběžek), proto má úloha právě jedno řešení, a tyto kružnice mají spolu vnější dotyk. Pokud by bod *B* ležel na kružnici *k*, výsledkem by byla totožná kružnice (kružnice *l* by splývala s kružnicí *k*). Kdyby bod *B* ležel uvnitř dané kružnice *k*, hledaný střed *O* by ležel na přímce *ST*. Úloha by měla též jedno řešení a kružnice by měly spolu vnitřní dotyk.

Analytické řešení této úlohy je analogické jako v první úloze.

10. Sestrojte kružnici *l*, která se dotýká dané kružnice *k*(*S; r*) v daném bodě *T* a dané přímky *p*.

Pappova úloha typu pkB

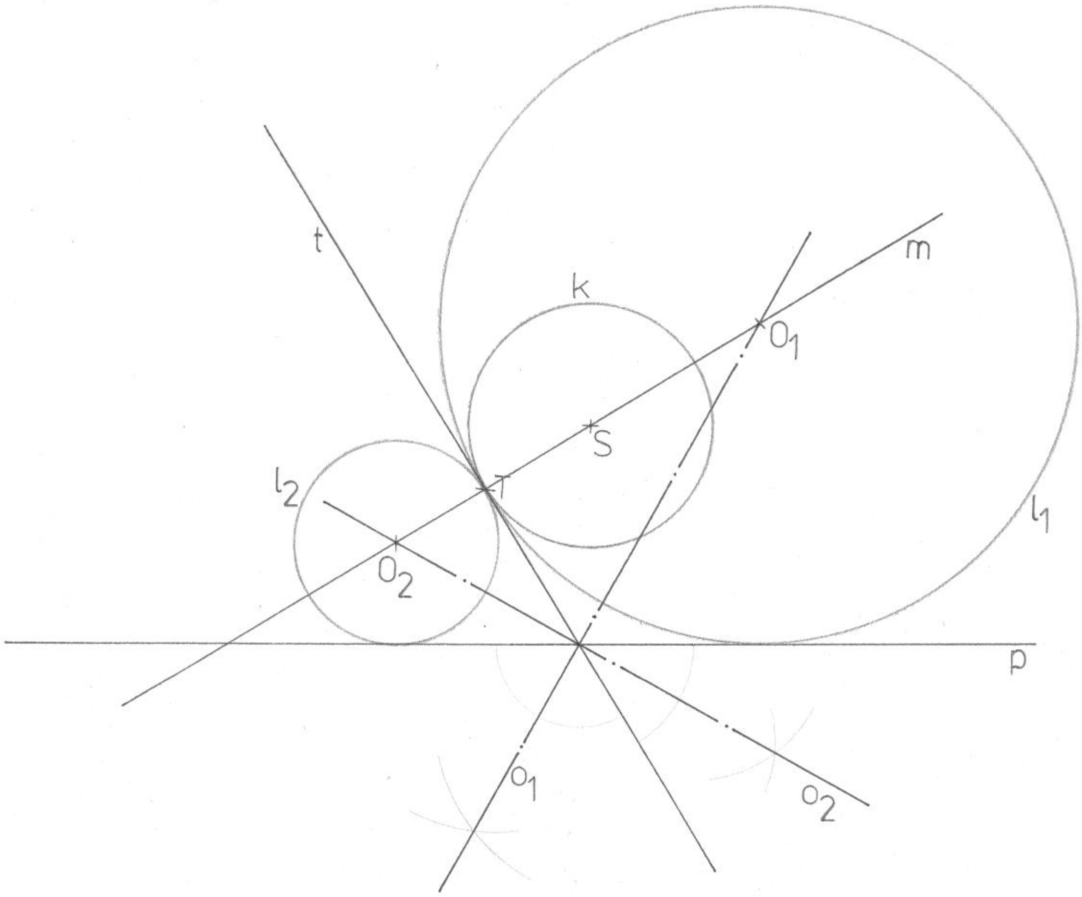


Obrázek 60: Náčrtek úlohy 10

ROZBOR: Uvažujme, že úloha má alespoň jedno řešení. Současně předpokládejme, že přímka *p* je nesečnou kružnice *k*. Úloha je polohová s jedním neznámým bodem, což je střed hledané kružnice *l*. Tento bod musí splňovat tyto požadavky: leží na přímce *m*, na které současně leží body *T* a *S*, a současně leží na osách úhlů určených přímkami *p* a *t*, kde *t* je tečna ke kružnici *k* procházející bodem *T*. Druhá podmínka vyplývá z bodu 5, a to, že pokud máme dvě různoběžky *p* a *t*, pak množinou všech středů kružnic, které se těchto různoběžek dotýkají, jsou navzájem kolmé dvě osy úhlů sevřené právě těmito různoběžkami.

Potom průsečík těchto dvou množin všech míst je střed hledané kružnice. A jak je již z náčrtku i rozboru patrné (neboli z podmínky o ose úhlu), úloha bude mít pravděpodobně dvě řešení.

KONSTRUKCE:



Obrázek 61: Konstrukce úlohy 10

ZÁPIS:

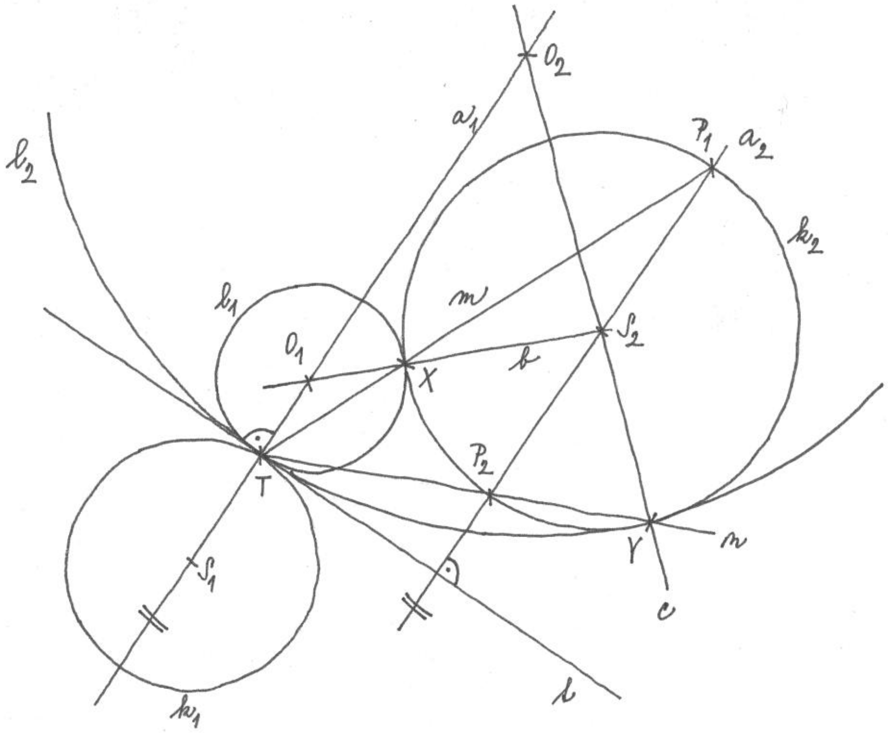
1. zadání: $k(S; r)$, $T \in k$, p
2. $\leftrightarrow m$; $S \in m$, $T \in m$
3. $\leftrightarrow t$; $T \in t$, $t \perp m$
4. osy o_1, o_2; osy o_1, o_2 úhlů určených přímkami p, t
5. O_1; $\{O_1\} \in o_1 \cap m$
6. O_2; $\{O_2\} \in o_2 \cap m$
7. l_1; $l_1(O_1; |O_1T|)$
8. l_2; $l_2(O_2; |O_2T|)$

DISKUSE: Přímka *p* může mít tři polohy vzhledem ke kružnici *k*: a) přímka *p* je nesečnou kružnice *k* (naše řešení), b) přímka *p* je tečnou kružnice *k*, c) přímka *p* je sečnou kružnice *k*. Ve všech těchto polohách přímky *p* má úloha vždy dvě řešení, neboť osy jsou dvojice navzájem kolmých přímek a tečna *t* je různoběžná. Osy pak protnou přímku *m* ve dvou bodech, což jsou středy hledaných kružnic.

V případě, kdy přímka *p* je tečnou kružnice *k*, druhý střed hledané kružnice je pak totožný (splývá) se středem dané kružnice *k*.

11. Sestrojte kružnici *l*, která se dotýká dvou daných kružnic $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a prochází bodem *T*, který leží na jedné z kružnic.

Pappova úloha typu kkB



Obrázek 62: Náčrtek úlohy 11

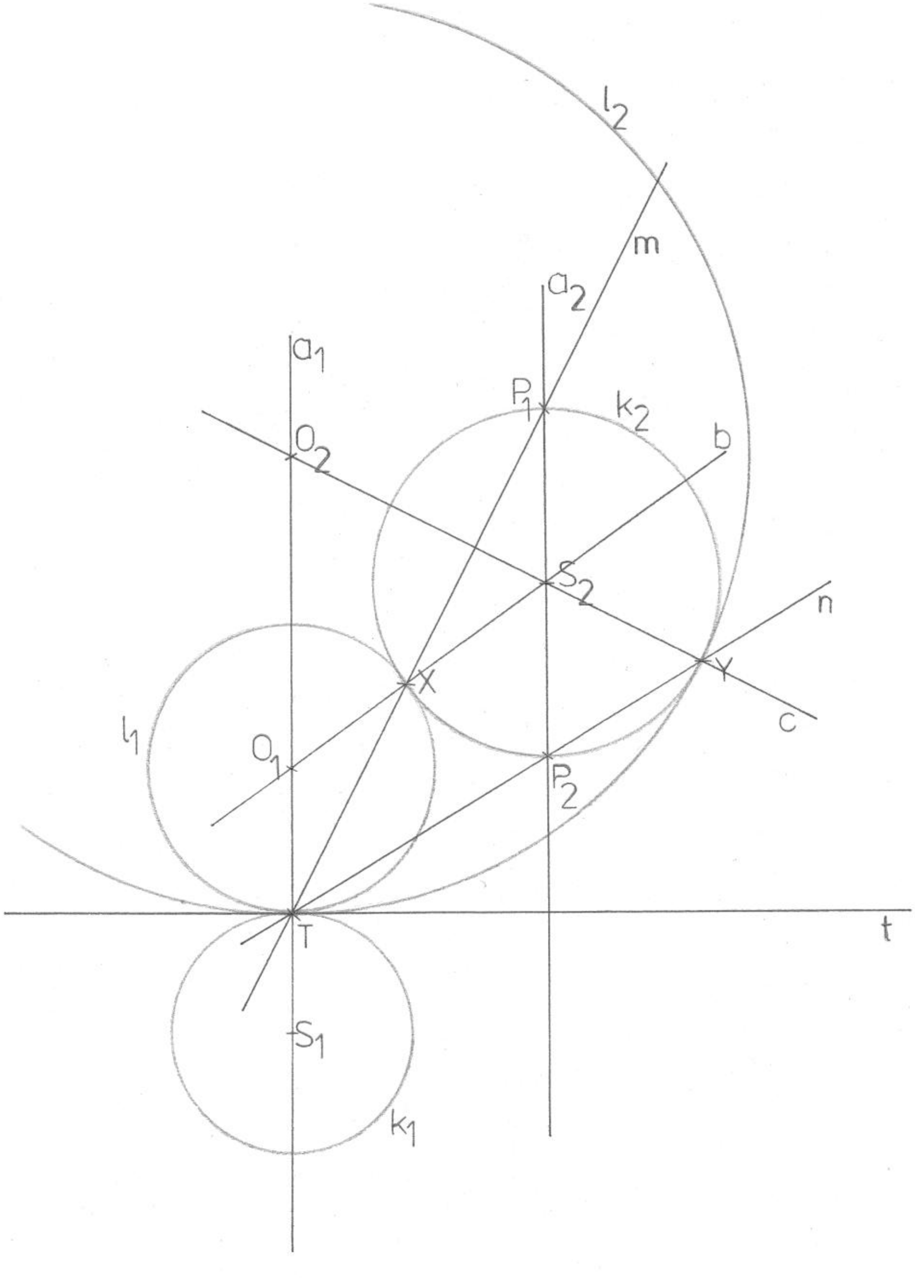
<u>ROZBOR:</u> Uvažujme, že tato úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je polohová, pouze s jedním neznámým bodem, což je střed hledané kružnice *l*. Na začátek musíme uvést nějaké vstupní předpoklady, které budou ovlivňovat řešení této úlohy:

a) kružnice k_1, k_2 jsou nesoustředné ($S_1 \neq S_2$),
b) poloměry kružnic k_1, k_2 jsou různé ($r_1 \neq r_2$),
c) vzdálenost středů S_1, S_2 je větší než součet jejich poloměrů ($|S_1S_2| > r_1 + r_2$).

To znamená, že kružnice k_1, k_2 leží vně sebe a každá z nich má různý poloměr. Na kružnici k_1 si zvolíme bod *T*. Pak množina všech středů kružnic, na kterých leží současně střed S_1 kružnice k_1, střed *O* hledané kružnice *l* a zvolený bod *T*, je přímka a_1, která prochází všemi těmito body. Sestrojíme rovnoběžku a_2 s přímkou a_1 procházející středem S_2 druhé kružnice. Přímka a_2 protne kružnici k_2 ve dvou bodech, tyto průsečíky označíme jako body P_1, P_2, které spojíme se zvoleným bodem *T*.

Průsečík úsečky P_1T s kružnici k_2 označíme jako bod *X*. Průsečík úsečky P_2T s kružnici k_2 označíme jako bod *Y*. Body *X*, *Y* jsou kromě bodu *T* dalšími dvěma body dotyku. Pak přímky *b*, *c* protnou přímku a_1 každá v jednom bodě, vzniknou tedy dva středy hledaných kružnic, a proto má úloha dvě řešení.

KONSTRUKCE:



Obrázek 63: Konstrukce úlohy 11

ZÁPIS:

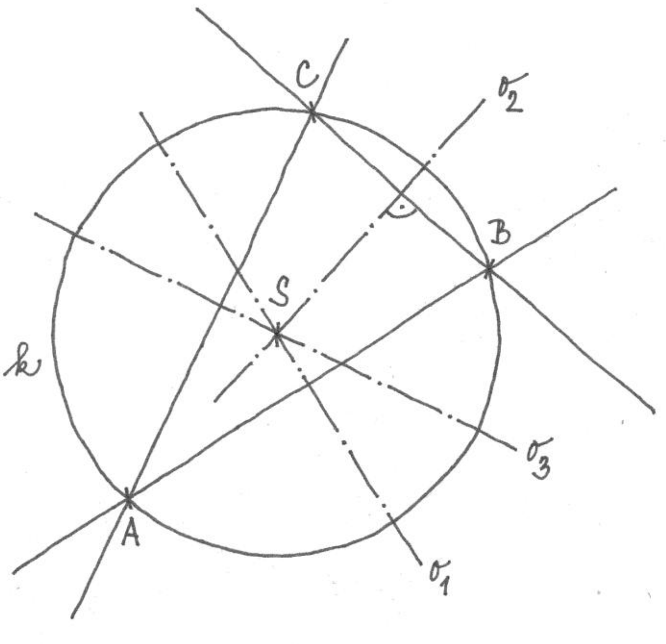
1. zadání: $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$, $T \in k_1$
2. $\leftrightarrow a_1$; $S_1 \in a_1$, $T \in a_1$
3. $\leftrightarrow t$; $t \perp a_1$, $T \in t$
4. $\leftrightarrow a_2$; $a_2 \parallel a_1$, $S_2 \in a_2$
5. P_1, P_2; $\{P_1\} \in k_2 \cap a_2$, $\{P_2\} \in k_2 \cap a_2$
6. $\leftrightarrow m$; $P_1 \in m$, $T \in m$
7. $\leftrightarrow n$; $P_2 \in n$, $T \in n$
8. X; $\{X\} \in k_2 \cap m$

9. Y; $\{Y\} \in n \cap k_2$
10. $\leftrightarrow b$; $X \in b$, $S_2 \in b$
11. $\leftrightarrow c$; $Y \in c$, $S_2 \in c$
12. O_1; $\{O_1\} \in a_1 \cap b$
13. O_2; $\{O_2\} \in a_1 \cap c$
14. l_1; $l_1(O_1; |O_1T|)$
15. l_2; $l_2(O_2; |O_2T|)$

DISKUSE: V rozboru jsme již odvodili, že úloha s našimi určitými vstupními podmínkami má dvě řešení. Jedna hledaná kružnice se dotýká kružnic k_1, k_2 vně, druhá hledaná kružnice má s první danou kružnicí vnější dotyk a s druhou danou kružnicí vnitřní dotyk. Tuto úlohu můžeme obměnit různými změnami vstupních podmínek:

a) Kružnice k_1, k_2 jsou soustředné kružnice ($S_1 = S_2 = S$), poloměr r_1 kružnice k_1 je menší než poloměr r_2 kružnice k_2 ($r_1 < r_2$). Tzn., že kružnice k_1 leží uvnitř kružnice k_2. Pak má úloha dvě řešení.
b) Kružnice k_1, k_2 jsou nesoustředné ($S_1 \neq S_2$), poloměr r_1 kružnice k_1 je menší než poloměr r_2 kružnice k_2 ($r_1 < r_2$), ale kružnice k_1 stejně leží uvnitř kružnice k_2. Pak úloha má dvě řešení.
c) Dané kružnice k_1, k_2 se protínají, pak úloha má dvě řešení.
d) Kdyby kružnice k_1, k_2 měly vnitřní dotyk, pak bychom nalezli pouze jedno řešení.
e) Jedna hledaná kružnice by byla řešením, kdyby dané kružnice k_1, k_2 měly vnější dotyk.

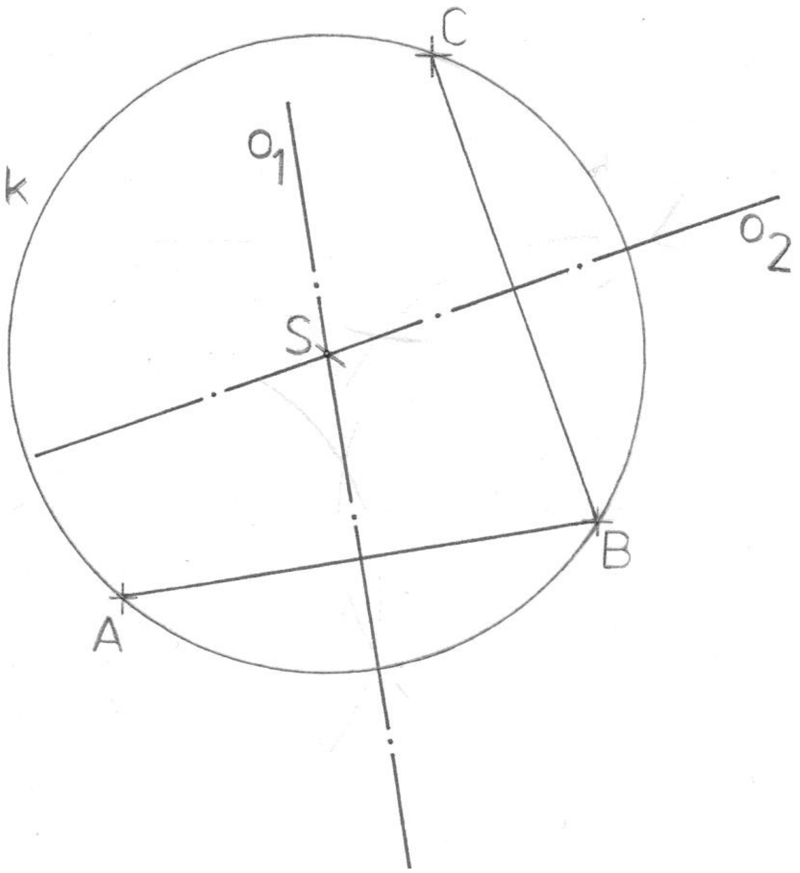
12. Sestrojte kružnici k, která prochází body A, B, C. Tyto tři body neleží na jedné přímce.



Obrázek 64: Náčrtek úlohy 12

ROZBOR: Předpokládáme, že úloha má aspoň jedno řešení. Úloha je polohová s pouze jedním neznámým bodem. Tím bodem je střed S hledané kružnice k. Jelikož body A, B, C jsou nekolineární, jedná se o konstrukci kružnice opsané danému trojúhelníku, určeného třemi zadanými body. Hledaný střed kružnice je bodem průniku os úseček AB, BC a AC. Nám ke konstrukci stačí pouze některé dvě ze tří os.

KONSTRUKCE:



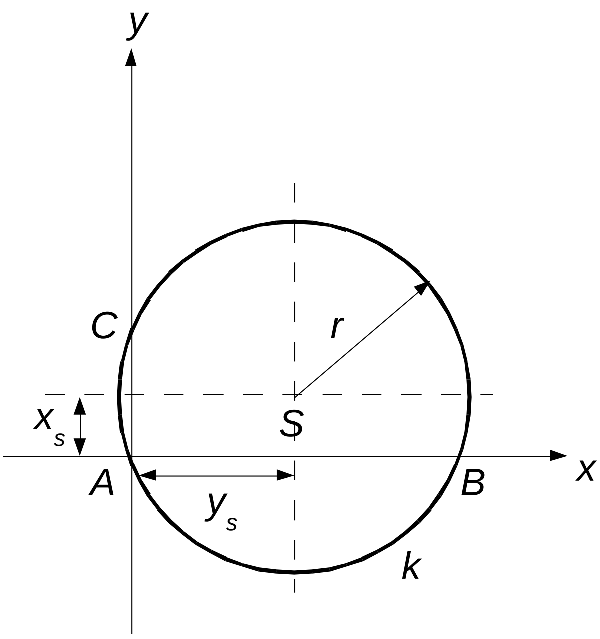
Obrázek 65: Konstrukce úlohy 12

ZÁPIS:

1. zadání: A, B, C
2. osa o_1; osa o_1 úsečky AB
3. osa o_2; osa o_2 úsečky BC
4. S; $\{S\} \in o_1 \cap o_2$
5. k; $k(S; |SA|)$

DISKUSE: Každá z úseček AB, BC, AC má právě jednu osu. Tyto osy jsou různoběžné přímky, které se protnou právě v jednom bodě. Úloha má tedy jedno řešení. Kdyby body A, B, C ležely na jedné přímce, úloha by neměla řešení.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 66: Analytické řešení úlohy 12

Stanovíme souřadnice bodů *A*, *B*, *C*, *S*: *A*[0; 0], *B*[x_b; 0], C[0; y_c], S[x_s; y_s]. Právě souřadnice středu *S* kružnice *k* a její poloměr *r* jsou pro nás neznámé. Nechť tedy kružnice *k* má rovnici $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$. Pak:

a) $A \in k$:

$$0^2 + 0^2 + M \cdot 0 + N \cdot 0 + L = 0$$

$$\underline{\underline{L = 0}}$$

b) $B \in k$:

$$x_b^{\ 2} + 0^2 + M \cdot x_b + N \cdot 0 + L = 0$$

$$x_b^{\ 2} + M \cdot x_b = 0$$

$$M \cdot x_b = -x_b^{\ 2}$$

$$\underline{\underline{M = -x_b}}$$

c) $C \in k$:

$$0^2 + y_c^{\ 2} + M \cdot 0 + N \cdot y_c + L = 0$$

$$y_c^{\ 2} + N \cdot y_c = 0$$

$$\underline{\underline{N = -y_c}}$$

Pak koeficienty M, N, L dosadíme do původní rovnice kružnice k a rovnici postupně upravujeme:

$$x^2 + y^2 - x_b \cdot x - y_c \cdot y + 0 = 0$$

$$x^2 - x_b \cdot x + y^2 - y_c \cdot y = 0$$

$$\left(x - \frac{x_b}{2}\right)^2 - \frac{x_b^{\ 2}}{4} + \left(y - \frac{y_c}{2}\right)^2 - \frac{y_c^{\ 2}}{4} = 0$$

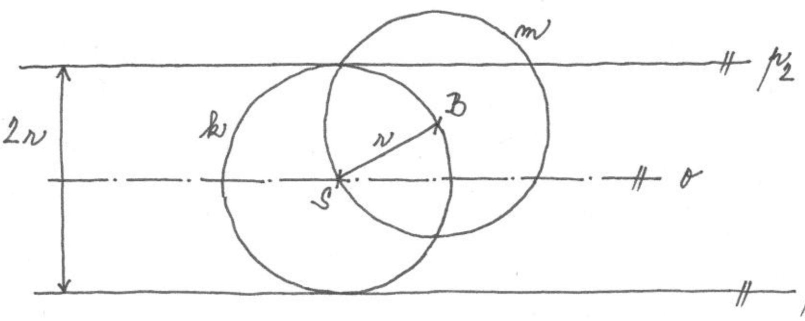
$$\left(x - \frac{x_b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_c}{2}\right)^2 = \frac{x_b^{\ 2}}{4} + \frac{y_c^{\ 2}}{4},$$

což je rovnice hledané kružnice.

Pak střed S kružnice k má souřadnice $S\left[\frac{x_b}{2}; \frac{y_c}{2}\right]$, poloměr r kružnice k je

$$r = \sqrt{\frac{x_b^{\ 2}}{4} + \frac{y_c^{\ 2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x_b^{\ 2} + y_c^{\ 2}}.$$

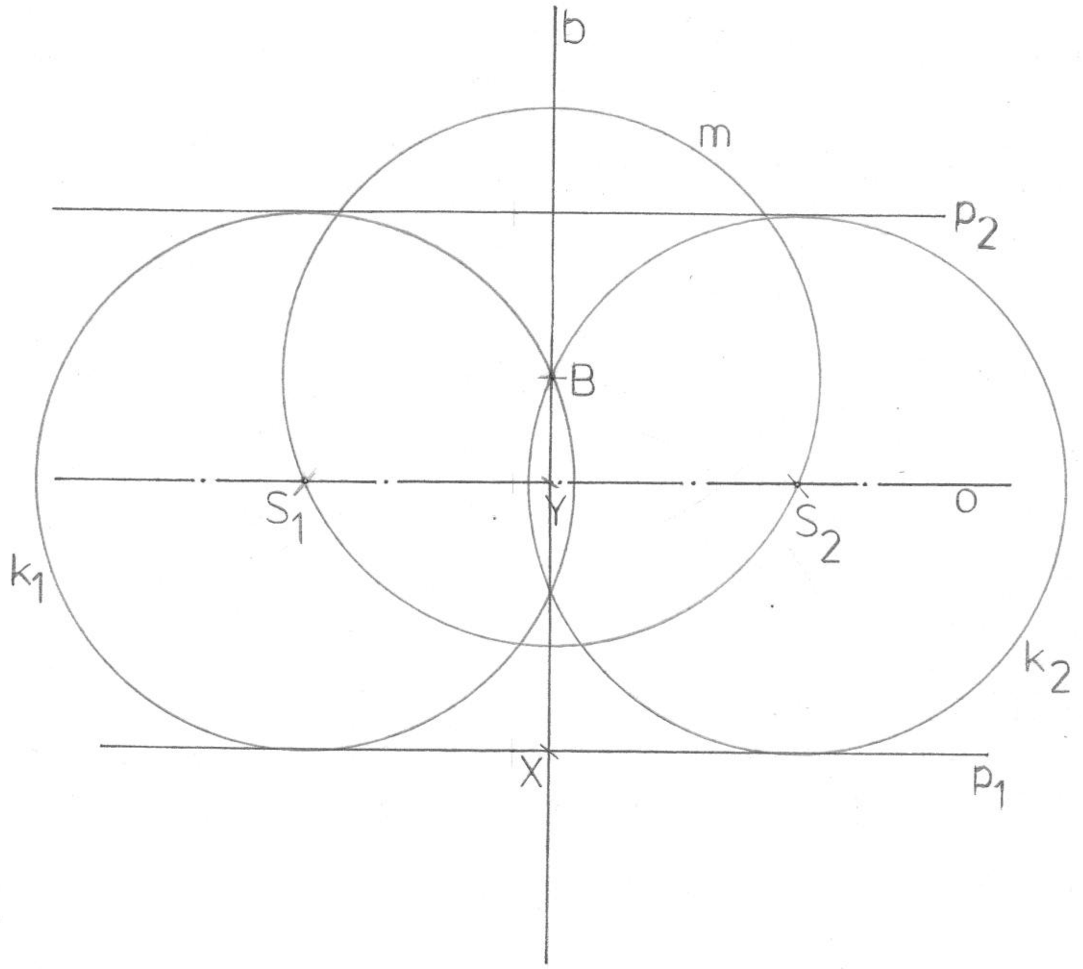
13. Sestrojte kružnici *k*, která prochází bodem *B* a dotýká se přímek p_1, p_2. Přímky p_1, p_2 jsou rovnoběžné a bod *B* neleží na žádné ze zadaných přímek, ale leží uvnitř pásu určeného přímkami p_1, p_2.



Obrázek 67: Náčrtek úlohy 13

<u>ROZBOR:</u> Uvažujme, že úloha má alespoň jedno řešení. Je to úloha polohová. Hledáme jeden neznámý bod, a to střed S kružnice k. Množina středů všech kružnic, které se dotýkají přímek p_1, p_2, je osa pásu určeného právě těmito přímkami. Množina středů všech kružnic, které procházejí bodem B, je kružnice se středem právě v tomto bodě B a poloměrem rovným polovině vzdálenosti přímek p_1, p_2. Bodem průniku těchto množin všech bodů je střed hledané kružnice k.

KONSTRUKCE:



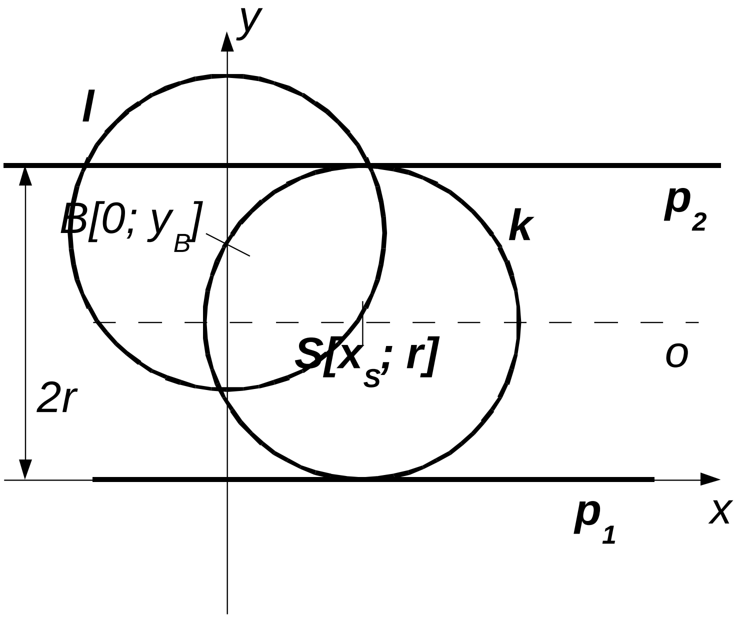
Obrázek 68: Konstrukce úlohy 13

ZÁPIS:

1. zadání: p_1, p_2, B
2. $\leftrightarrow b$; $b \perp p_1$, $B \in b$
3. X; $\{X\} \in p_1 \cap b$
4. osa pásu o; osa pásu o určeného přímkami p_1, p_2
5. Y; $\{Y\} \in o \cap b$
6. m; $m(B; |XY|)$
7. S_1, S_2; $\{S_1\} \in o \cap m$, $\{S_2\} \in o \cap m$
8. k_1; $k_1(S_1; |S_1B|)$
9. k_2; $k_2(S_2; |S_2B|)$

DISKUSE: Úloha by neměla žádné řešení, pokud by bod B ležel vně pásu určeného přímkami p_1, p_2. Kdyby bod B ležel na jedné ze zadaných přímek, jednalo by se o Pappovu úlohu typu *ppB*. V našem případě vzdálenost bodu B od osy pásu o je menší než poloměr kružnice m, pak tato kružnice se středem v bodě B protne osu pásu o ve dvou bodech a vzniknou tak dva hledané středy kružnice. Proto úloha má dvě řešení. Zcela stejný postup i řešení by bylo pro případ, kdyby bod B ležel přesně na ose pásu o.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 69: Analytické řešení úlohy 13

Napíšeme si rovnice přímek p_1, p_2, o podle obrázku:

p_1: $y = 0$

p_2: $y = 2r$

o: $y = r$

Pak kružnice l má střed v bodě B a poloměr rovný polovině vzdálenosti přímek p1, p2, tedy r. Průsečík kružnice l a osy o je bod S, což je střed hledané kružnice k, která se dotýká daných dvou rovnoběžných přímek p_1, p_2 a která prochází bodem B. Zaprvé si zapíšeme rovnici kružnice l:

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - y_B)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y - y_B)^2 = r^2$$

$$\{S\} = l \cap o$$

$$x^2 + (r - y_B)^2 = r^2$$

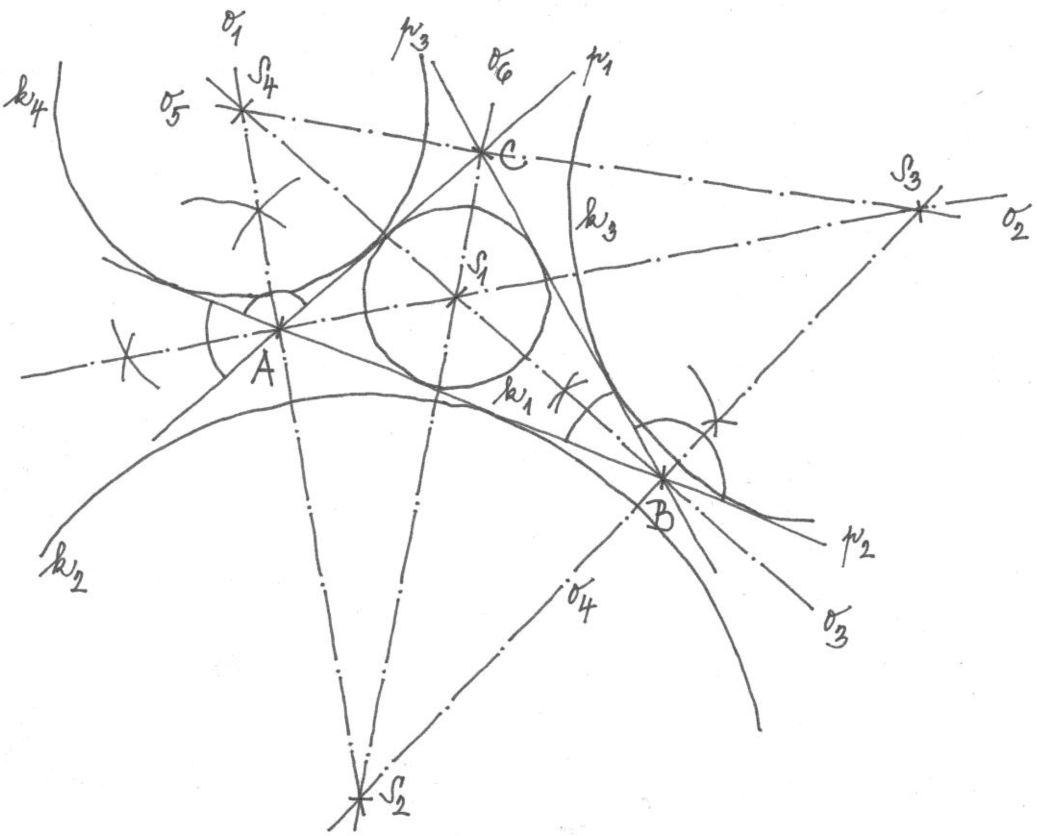
$$x^2 + r^2 - 2ry_B + y_B{}^2 = r^2$$

$$x^2 = 2ry_B - y_B{}^2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_B \cdot (2r - y_B)}$$

Tím jsme získali dvě x-ové souřadnice bodu S, jeho y-ová souřadnice je rovna poloměru r. Tedy $S_1[x_1; r]$, $S_2[x_2; r]$.

14. Sestrojte kružnici k, která se dotýká tří přímek p_1, p_2, p_3.

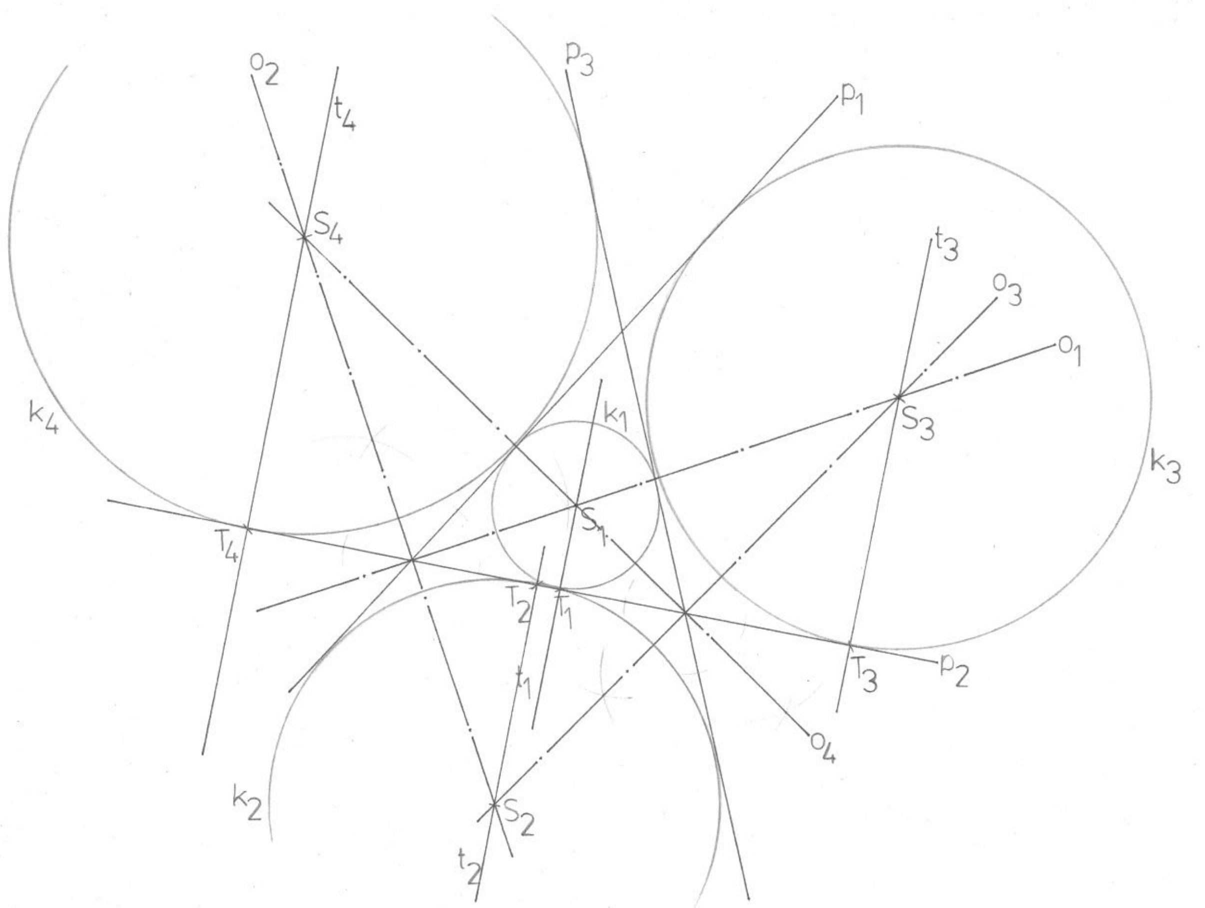


Obrázek 70: Náčrtek úlohy 14

<u>ROZBOR:</u> Předpokládejme, že úloha má aspoň jedno řešení. Tato úloha je nepolohová. Abychom ji mohli převést na polohovou, musíme dané tři přímky p_1, p_2, p_3 umístit do roviny. Řešení úlohy tedy závisí na vzájemné poloze přímek. Je zřejmé, že případem, kdy dané tři přímky jsou rovnoběžné, nemá cenu se zabývat, protože takové řešení neexistuje. Stejně tak i situací, kdy přímky p_1, p_2, p_3 jsou různoběžné, ale protínají se v jednom bodě. Taková úloha též nemá řešení. Mnohem zajímavější už je, když dané tři přímky jsou sice různoběžné, ale protínají se ve třech různých bodech A, B, C.

Jedná se o konstrukci kružnice vepsané a kružnic připsaných trojúhelníku ABC, určeného třemi zadanými přímkami. Hledané středy kružnic jsou body průniku šesti os úhlů určených přímkami p_1, p_2, p_3. Ke konstrukci nám postačí narýsovat dvě ze tří dvojic os.

KONSTRUKCE:



Obrázek 71: Konstrukce úlohy 14

ZÁPIS:

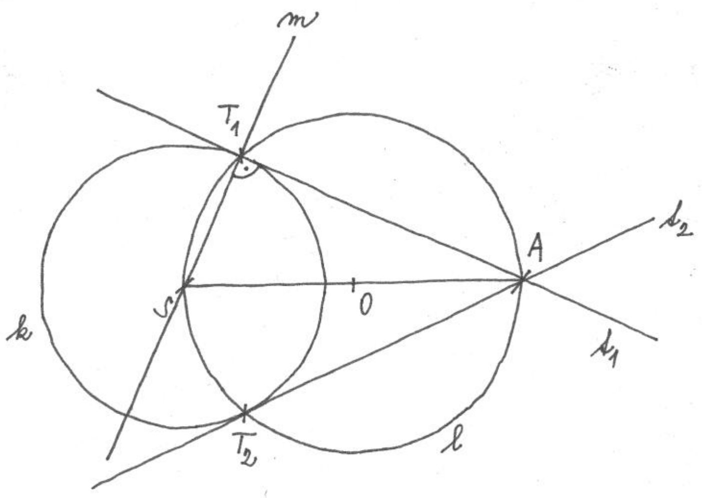
1. zadání: p_1, p_2, p_3
2. osy o_1, o_2; osy úhlu o_1, o_2 sevřeného přímkami p_1, p_2
3. osy o_3, o_4; osy úhlu o_3, o_4 sevřeného přímkami p_2, p_3
4. S_1; $\{S_1\} \in o_1 \cap o_4$
5. $\leftrightarrow t_1$; $t_1 \perp p_2$; $S_1 \in t_1$
6. T_1; $\{T_1\} \in t_1 \cap p_2$
7. k_1; $k_1(S_1; |S_1T_1|)$
8. S_2; $\{S_2\} \in o_2 \cap o_3$
9. $\leftrightarrow t_2$; $t_2 \perp p_2$, $S_2 \in t_2$
10. T_2; $\{T_2\} \in t_2 \cap p_2$
11. k_2; $k_2(S_2; |S_2T_2|)$
12. S_3; $\{S_3\} \in o_1 \cap o_3$
13. $\leftrightarrow t_3$; $t_3 \perp p_2$, $S_3 \in t_3$
14. T_3; $\{T_3\} \in t_3 \cap p_2$
15. k_3; $k_3(S_3; |S_3T_3|)$

16. S_4; $\{S_4\} \in o_2 \cap o_4$
17. $\leftrightarrow t_4$; $t_4 \perp p_2$, $S_4 \in t_4$
18. T_4; $\{T_4\} \in t_4 \cap p_2$
19. k_4; $k_4(S_4; |S_4T_4|)$

DISKUSE: Každé dvě různoběžky vytínají v rovině čtyři úhly. Osy se protnou vždy po třech ve čtyřech bodech S. Úloha má proto čtyři řešení.

Můžeme se zabývat ještě jiným případem vzájemné polohy přímek, a to, kdy dvě ze zadaných přímek (např. p_1, p_2) jsou rovnoběžné, třetí (např. p_3) je s nimi různoběžná. Pak množinou všech středů kružnic, které se dotýkají rovnoběžných přímek p_1, p_2, je osa pásu určeného těmito přímkami. Množina středů všech kružnic, které se dotýkají různoběžné přímky p_3 a mají daný poloměr r (tj. polovina vzdálenosti rovnoběžných přímek), jsou dvě rovnoběžky k této různoběžce p_3 ve vzdálenosti r. Průnikem těchto množin je střed hledané kružnice. Úloha má dvě řešení, protože můžeme sestrojit dvě rovnoběžky k přímce p_3. Obě tyto rovnoběžky jsou s osou pásu různoběžné a protínají ji ve dvou různých bodech.

15. Sestrojte tečny k dané kružnici $k(S; r)$ procházející daným bodem A, který leží ve vnější oblasti kružnice k.



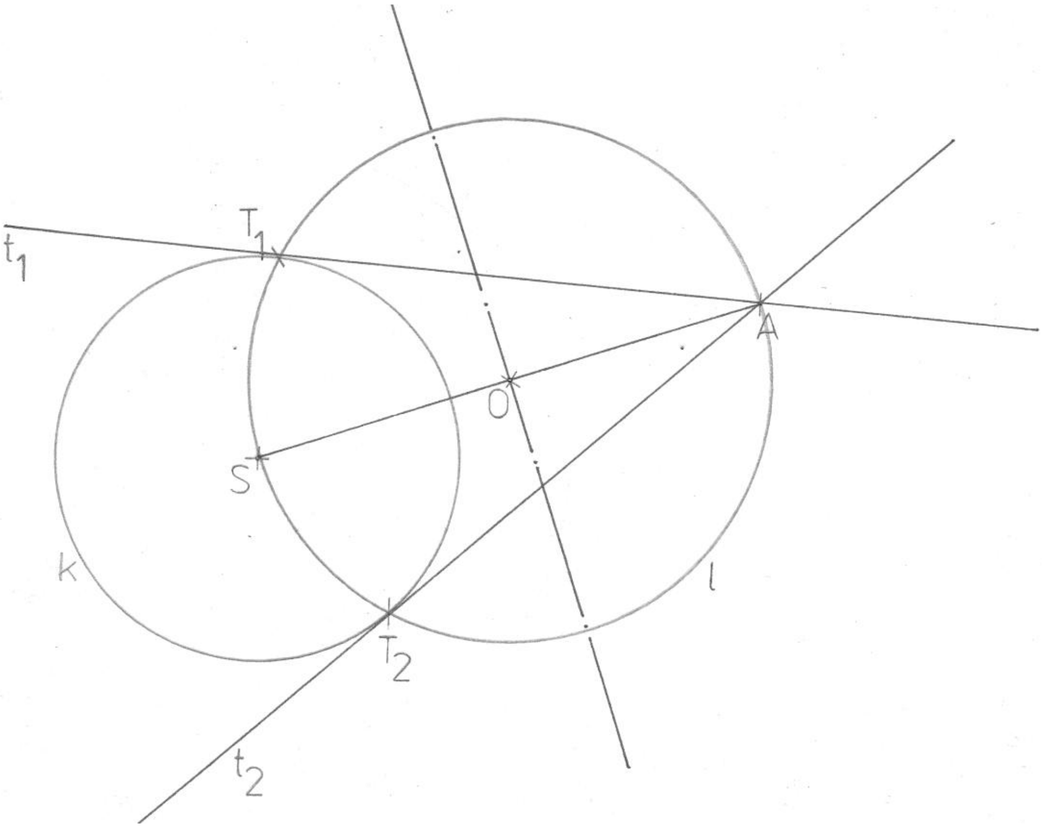
Obrázek 72: Náčrtek úlohy 15

ROZBOR: Uvažujme, že daná úloha má alespoň jedno řešení. Úloha je polohová, hledaným bodem je bod dotyku T sestrojované tečny. Pak tečna t, procházející body A, T, je kolmá k přímce m, tedy k přímce procházející body S, T. Pak bod T leží na Thaletově kružnici nad průmětem SA.

Pokud by v zadání nebyla upřesněna poloha bodu A, mohly by nastat další dva případy:

a) Bod A leží na kružnici k, pak právě tento bod je tečným bodem kružnice k ($T = A$). Jedinou tečnu t pak sestrojíme jako kolmici k přímce m, tedy k přímce procházející body A, S.
b) Bod A leží ve vnitřní oblasti kružnice k, pak není možné sestrojit žádnou takovou tečnu. Úloha pak nemá žádné řešení.

KONSTRUKCE:



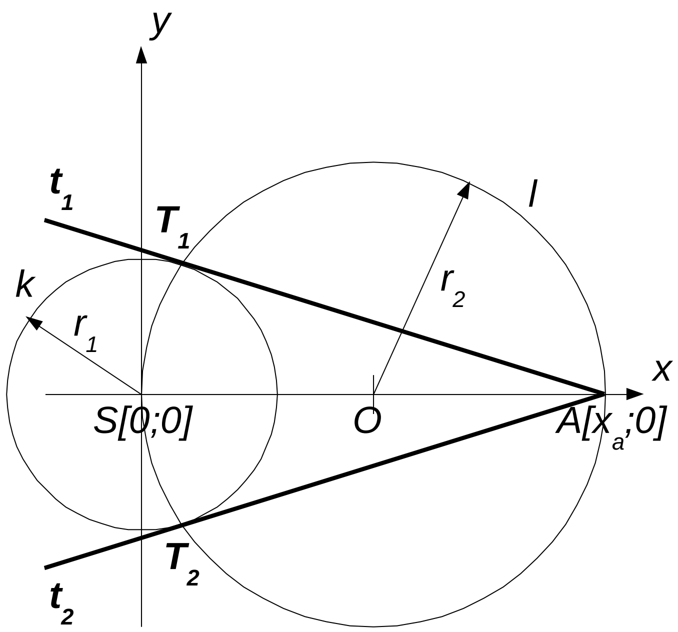
Obrázek 73: Konstrukce úlohy 15

ZÁPIS:

1. zadání: $k(S; r)$, A
2. SA
3. O; $O \in SA$, $|OA| = |OS|$
4. l; $l(O; |OS|)$
5. T_1, T_2; $\{T_1\} \in k \cap l$, $\{T_2\} \in k \cap l$
6. $\leftrightarrow t_1$; $A \in t_1$, $T_1 \in t_1$
7. $\leftrightarrow t_2$; $A \in t_2$, $T_2 \in t_2$

DISKUSE: Úloha má dvě řešení, protože Thaletova kružnice *l* protne danou kružnici *k* ve dvou bodech, jež jsou tečnými body hledaných tečen. Pokud

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 74: Analytické řešení úlohy 15

Tečné body T_1, T_2 jsou průsečíky kružnic $k(S;\ r_1)$ a $l(O;\ r_2)$. Nechť bod S je v počátku souřadnicové soustavy, tedy $S[0;\ 0]$, a bod O je středem úsečky SA, tedy $O\left[\frac{x_a}{2};0\right]$. Pak poloměr kružnice l je roven délce úsečky SO, tedy $r_2=\frac{x_a}{2}$. Teď si napišme rovnice obou kružnic:

$$k:(x-x_s)^2+(y-y_s)^2=r_1^{\ 2}$$
$$l:(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r_2^{\ 2}$$

$$\{T\}=k\cap l$$

Řešme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r_1^{\ 2}$$
$$\left(x-\frac{x_a}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{x_a}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2=r_1^{\ 2}$$
$$x^2-2x\cdot\frac{x_a}{2}+\frac{x_a^{\ 2}}{4}+y^2=\frac{x_a^{\ 2}}{4}$$

První rovnici soustavy vynásobíme (-1) a sečteme s druhou rovnicí:

$$-xx_a=-r_1^{\ 2}$$
$$x=\frac{r_1^{\ 2}}{x_a}$$

Tím jsme získali x-ovou souřadnici bodu T. Zbývá ještě zjistit jeho y-ovou souřadnici tak, že vytkneme y z jedné z rovnic soustavy:

$$y^2 = r_1^{\,2} - x^2$$

$$|y| = \sqrt{r_1^{\,2} - x^2}$$

$$y = \pm\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}$$

Tečné body T_1, T_2 mají tedy souřadnice $T_1\left[\frac{r_1^{\,2}}{x_a};\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}\right]$, $T_2\left[\frac{r_1^{\,2}}{x_a};-\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}\right]$.

Tečna t_1 je určena body A, T_1, tečna t_2 je určena body A, T_2. Dalším naším úkolem je napsat rovnice tečen t_1, t_2.

$$\vec{u}_1 = T_1 - A = \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a} - x_a;\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}\right) \text{ směrový vektor}$$

$$\vec{n}_1 = \left(\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2};x_a - \frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right) \text{ - normálový vektor}$$

$$t_1 : x\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} + y\cdot\left(x_a - \frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right) + c = 0$$

$$A \in t_1 : x_a\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} + c = 0 \Rightarrow c = (-x_a)\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}$$

$$t_1 : x\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} + y\cdot\left(x_a - \frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right) - x_a\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} = 0$$

Stejným způsobem získáme rovnici tečny t_2:

$$t_2 : x\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} + y\cdot\left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a} - x_a\right) - x_a\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}$$

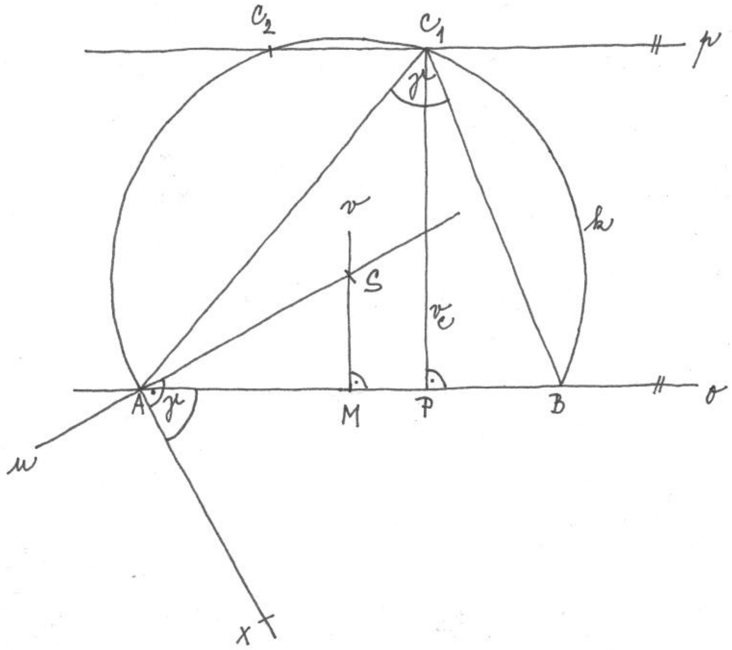
Ještě se můžeme přesvědčit, že tečna t_1 je kolmá na přímku ST_1. Stačí si určit směrový vektor přímky ST_1. Jestliže jsou přímky na sebe kolmé, pak skalární součin směrových vektorů je roven nule.

$$\vec{v}_1 = T - S = \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a};\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}\right)$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$\left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a} - x_a\right)\cdot\frac{r_1^{\,2}}{x_a} + \sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2}\cdot\sqrt{r_1^{\,2} - \left(\frac{r_1^{\,2}}{x_a}\right)^2} = \frac{r_1^{\,4}}{x_a^{\,2}} - r_1^{\,2} + r_1^{\,2} - \frac{r_1^{\,4}}{x_a^{\,2}} = 0$$

16. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dána velikost jedné jeho strany, příslušné výšky a velikost protilehlého vnitřního úhlu.



Obrázek 75: Náčrtek úlohy 16

ROZBOR: Předpokládejme, že úloha má aspoň jedno řešení. Nechť je dána délka strany *AB* (*AB* = *c*), výška v_c a vnitřní úhel při vrcholu *C* o velikosti χ. Úloha je nepolohová, umístěním strany *AB* ji převedeme na úlohu polohovou. Neznámým bodem bude vrchol *C*. Množina všech bodů, jež má od přímky *AB* vzdálenost v_c, jsou dvě rovnoběžky p_1, p_2 rovnoběžné s přímkou *AB* ve vzdálenosti v_c. Dále úsečka *AB* je z vrcholu *C* vidět pod zorným úhlem velikosti χ. Množinou všech bodů pak jsou dva shodné oblouky.

Pak z pravoúhlého trojúhelníka ΔAMS (pravý úhel při vrcholu *M*) vypočteme poloměr *r* kružnice *k* (neboli délku úsečky *SA*). Velikost úhlu při vrcholu *A* v tomto pravoúhlém trojúhelníku *AMS* je (90° - χ). Pak platí:

$$\sin(90° - \chi) = \frac{|SM|}{|AS|} \quad \textbf{\textit{(1)}}.$$

Délku úsečky |*SM*| vypočteme z Pythagorovy věty:

$$|SM|^2 = |AS|^2 - |AM|^2$$

$$|SM| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad \textbf{\textit{(2)}}.$$

Nechť rovnici (2) dosadíme do rovnice (1), umocníme a postupně upravujeme na konečný tvar hledaného poloměru *r*:

$$\sin^2(90° - \chi) = \frac{r^2 - \frac{c^2}{4}}{r^2}$$

$$r^2 \cdot \sin^2(90° - \chi) - r^2 = -\frac{c^2}{4}$$

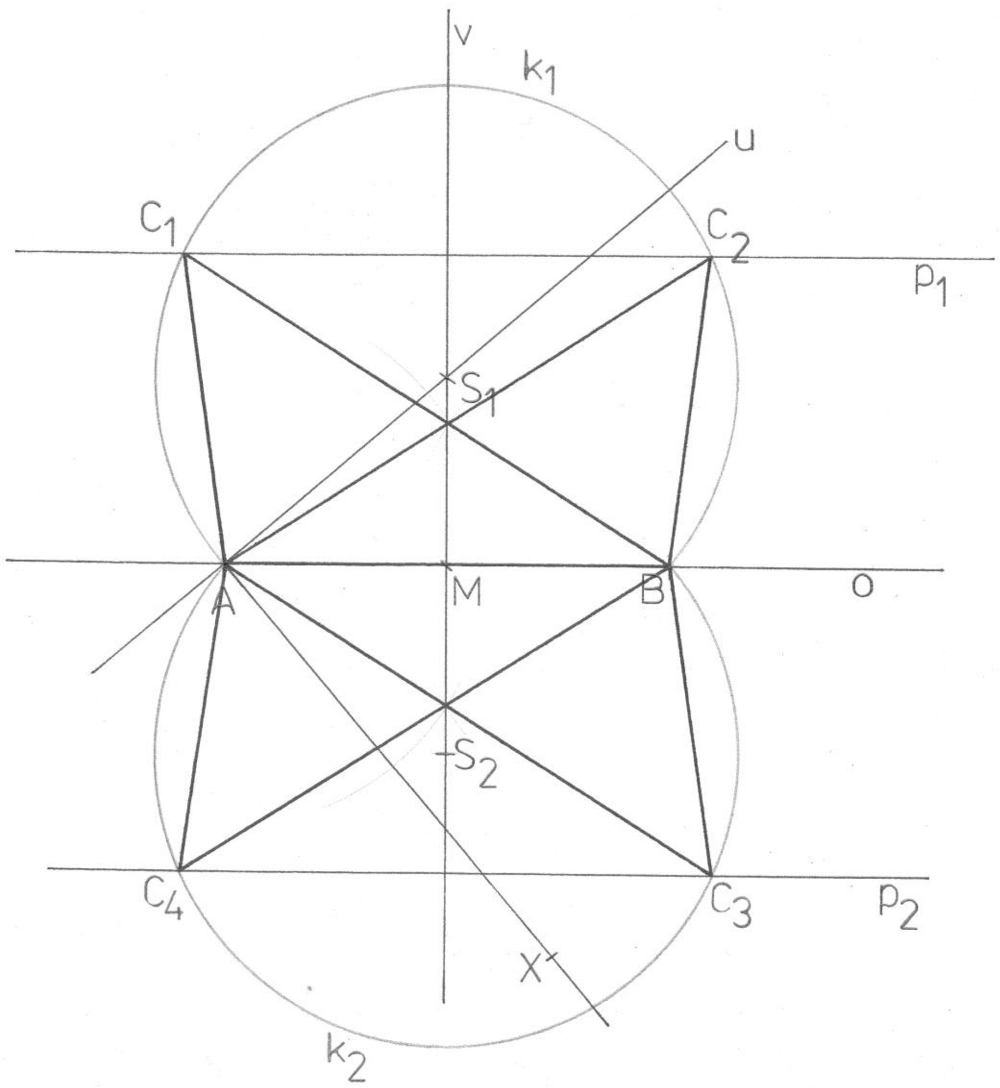
$$r^2 \cdot \left[\sin^2(90° - \chi) - 1\right] = -\frac{c^2}{4}$$

$$r^2 = \frac{-\frac{c^2}{4}}{\sin^2(90° - \chi) - 1} = \frac{-\frac{c^2}{4}}{1 - \sin^2 \chi - 1} = \frac{\frac{c^2}{4}}{\sin^2 \chi}$$

$$\underline{r = \frac{c}{2 \cdot \sin \chi}}$$

Střed *S* jednoho z těchto oblouků určíme konstrukčně tak, že sestrojíme polopřímku *AX* takovou, že úhel $\angle BAX = \chi$. Potom $AS \perp AX$ a $MS \perp AB$, přičemž bod *M* je střed úsečky *AB*. Jak je ovšem z náčrtku patrné, kružnice *k* (oblouk, z něhož je vidět úsečku *AB* pod úhlem χ) protne rovnoběžku *p* ve dvou bodech, vzniknou tedy dva hledané vrcholy *C* trojúhelníku *ABC*.

KONSTRUKCE:



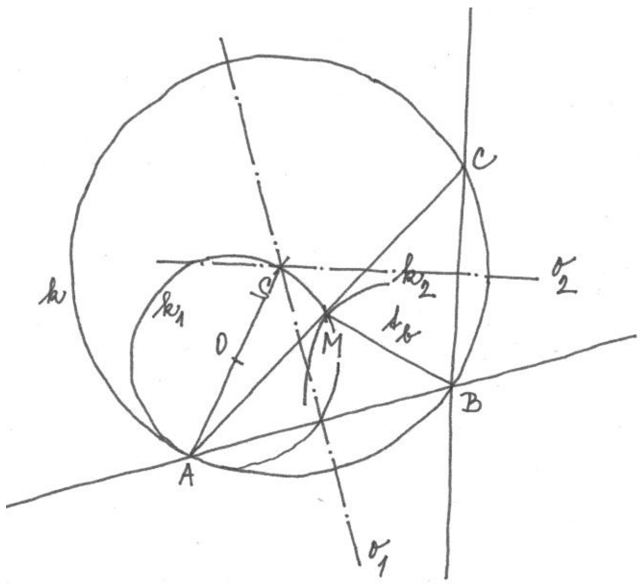
Obrázek 76: Konstrukce úlohy 16

ZÁPIS:

1. zadání: $AB = c$, v_c, $\angle ACB = \chi$
2. $\leftrightarrow o$; $A \in o$, $B \in o$, $|AB| = c$
3. $\leftrightarrow p_1, p_2$; $p_1 \parallel o$, $|op_1| = v_c$, $p_2 \parallel o$, $|op_2| = v_c$
4. M; $M \in o$, $|MA| = |MB|$
5. $\angle BAX$; $|\angle BAX| = \chi$
6. $\leftrightarrow u$; $u \perp \rightarrow AX$, $A \in u$
7. $\leftrightarrow v$; $v \perp o$, $M \in v$
8. S_1; $\{S_1\} \in v \cap u$
9. k_1; $k_1(S_1; |S_1A|)$
10. C_1, C_2; $\{C_1\} \in p_1 \cap k_1$, $\{C_2\} \in p_1 \cap k_1$
11. S_2; $S_2 \in v$, $|S_1M| = |MS_2|$
12. k_2; $k_2(S_2; |S_2A|)$
13. C_3, C_4; $\{C_3\} \in p_2 \cap k_2$, $\{C_4\} \in p_2 \cap k_2$
14. ΔABC_1, ΔABC_2, ΔABC_3, ΔABC_4

DISKUSE: Úloha je řešitelná, právě když kružnice k_1, k_2 a přímky p_1, p_2 mají společné body. Úloha má v našem případě tedy dvě řešení, neboť trojúhelníky ABC_3 a ABC_4 jsou shodné ($\Delta ABC_1 \cong \Delta ABC_4$, $\Delta ABC_2 \cong \Delta ABC_3$).

17. Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány velikosti jeho strany *c*, těžnice t_b a poloměr *r* kružnice opsané.

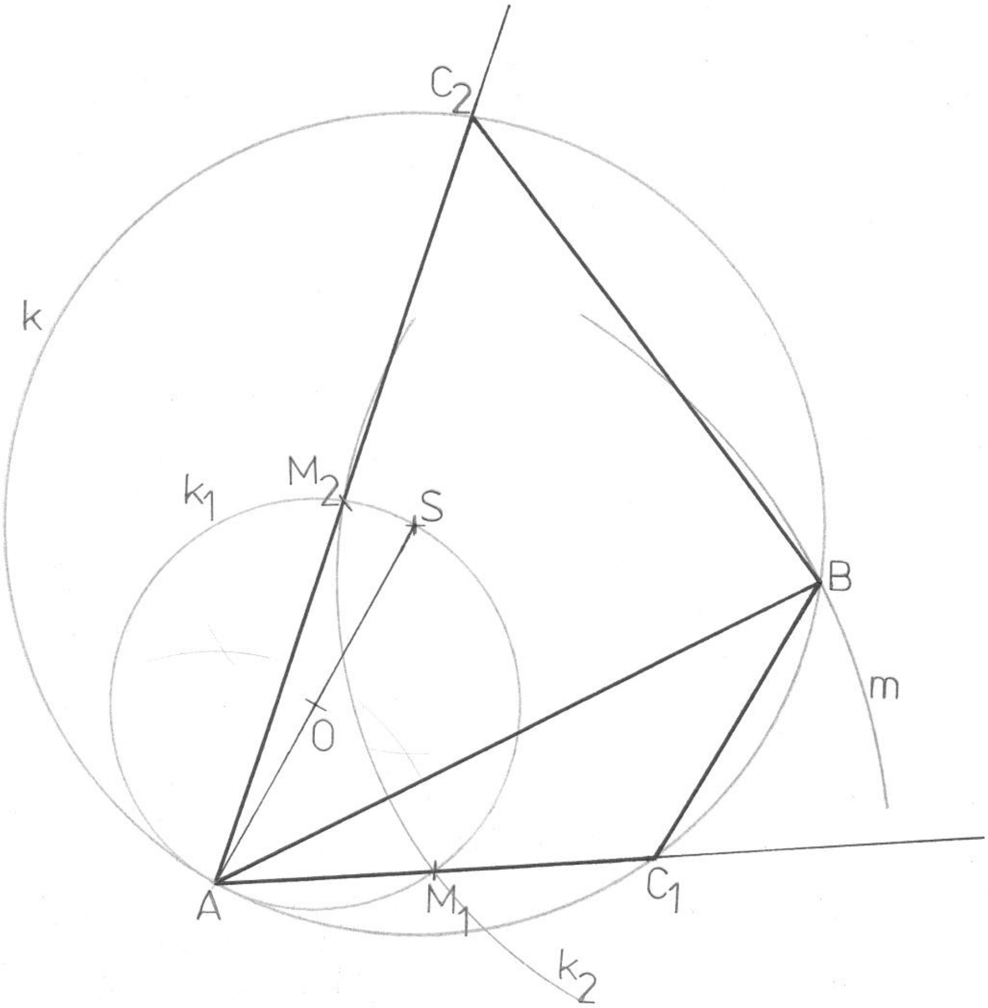


Obrázek 77: Náčrtek úlohy 17

ROZBOR: Předpokládejme, že úloha má alespoň jedno řešení. Je to úloha nepolohová. Umístíme-li střed S kružnice $k(S; r)$ a na ní body A, B tak, že $|AB| = c$, dostáváme úlohu polohovou se dvěma neznámými body, totiž vrcholem C a bodem M, který je středem strany AC. Vzdálenost bodu M od vrcholu B je rovna velikosti těžnice t_b.

Bod M tedy musí ležet na Thaletově kružnici k_1, sestrojené nad průmětem AS, a současně na kružnici $k_2(B;\ t_b)$. Pak vrchol C je průsečíkem kružnice opsané k a polopřímky AM. Též musí platit, že $|AC| = 2.|AM|$.

KONSTRUKCE:



Obrázek 78: Konstrukce úlohy 17

ZÁPIS:

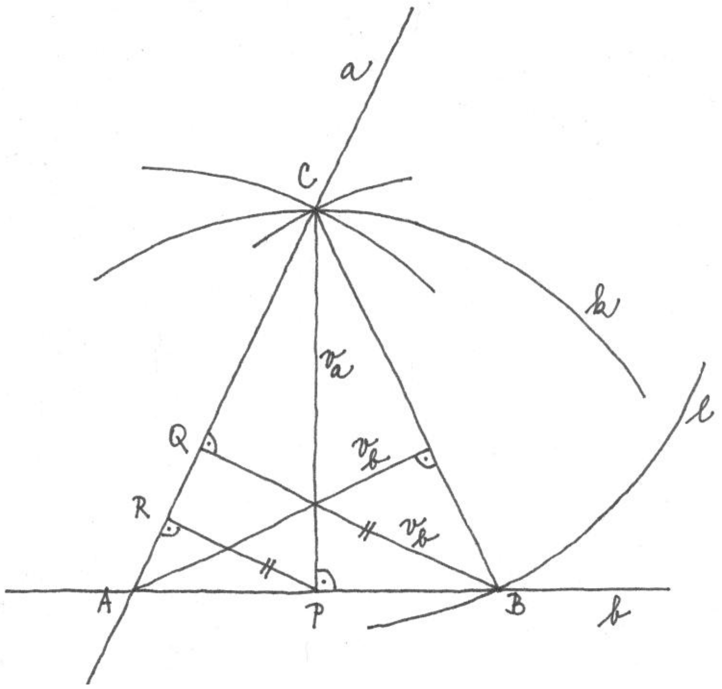
1. zadání: $|AB| = c,\ t_b,\ r$
2. k; $k(S;\ r)$, kde bod S je libovolný bod v rovině
3. A; $A \in k$ (libovolný bod A na kružnici k)
4. m; $m(A;\ |AB|)$
5. B; $\{B\} \in k \cap m$
6. AS
7. O; $O \in AS$, $|AO| = |OS|$
8. k_1; $k_1(O;\ |AO|)$
9. k_2; $k_2(B_1;\ t_b)$

10. $M_1, M_2; \{M_1\} \in k_1 \cap k_2, \{M_2\} \in k_1 \cap k_2$
11. $\rightarrow AM_1$
12. $C_1; \{C_1\} \in k \cap \rightarrow AM_1$
13. $\rightarrow AM_2$
14. $C_2; \{C_2\} \in k \cap \rightarrow AM_2$
15. $\Delta ABC_1, \Delta ABC_2$

DISKUSE: V našem případě má úloha dvě řešení. Neboť kružnice $k_2(B_1; t_b)$ protne kružnici k_1 ve dvou bodech M_1, M_2. Vzniknou tedy dva průsečíky M, proto má úloha dvě řešení. Pokud by kružnice k_1, k_2 měly vnější dotyk, pak by úloha měla právě jedno řešení. Kdyby se kružnice neprotínaly, pak by žádný bod M neexistoval a úloha by neměla žádné řešení.

Podmínkou řešitelnosti této úlohy je, že $t_b > c$.

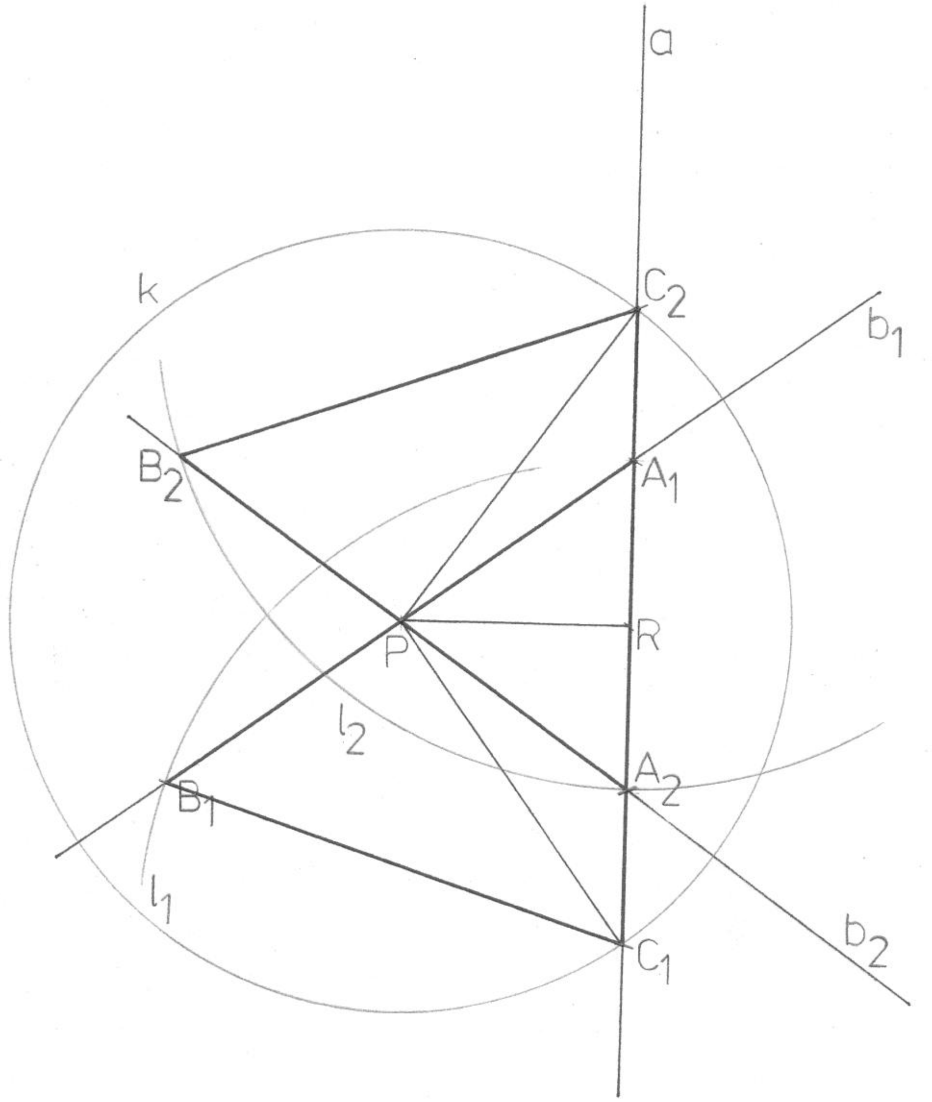
18. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník *ABC* o základně *a* a rameni *b*, je-li dáno v_a, v_b.



Obrázek 79: Náčrtek úlohy 18

ROZBOR: Uvažujme, že úloha má alespoň jedno řešení. Tato úloha je nepolohová. Označme výšku $v_a = CP$, výšku $v_b = BQ$, kde body P, Q jsou paty výšek v_a, v_b. Pak úsečka PR je výškou trojúhelníka ACP a má velikost $\frac{1}{2}v_b$. Nejprve tedy zkonstruujeme pravoúhlý trojúhelník APR a úlohu převedeme na polohovou. Postupujeme dle vlastností rovnoramenného trojúhelníka a dle vlastností výšek. Výška je kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu. U rovnoramenného trojúhelníka lze konstatovat, že pata P kolmice v_a půlí stranu AB.

KONSTRUKCE:



Obrázek 80: Konstrukce úlohy 18

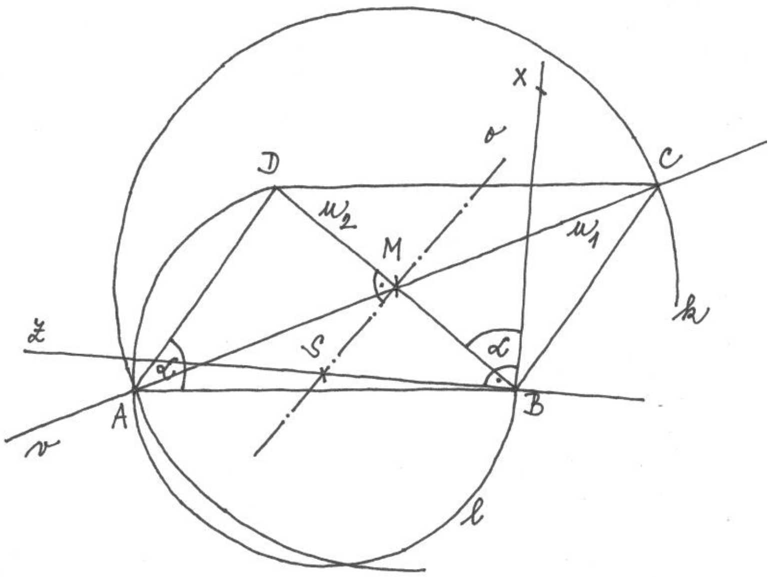
ZÁPIS:

1. zadání: v_a, v_b
2. PR; $|PR| = \frac{1}{2} v_b$
3. $\leftrightarrow a$; $a \perp \leftrightarrow PR$; $R \in a$
4. k; $k(P; v_a)$
5. C_1, C_2; $\{C_1\} \in a \cap k$, $\{C_2\} \in a \cap k$
6. PC_1, PC_2
7. $\leftrightarrow b_1$; $b_1 \perp PC_1$, $P \in b_1$
8. $\leftrightarrow b_2$; $b_2 \perp PC_2$, $P \in b_2$
9. A_1; $\{A_1\} \in a \cap b_1$
10. A_2; $\{A_2\} \in a \cap b_2$
11. l_1; $l_1(C_1; |A_1C_1|)$

12. l_2; $l_2(C_2; |A_2C_2|)$
13. B_1; $\{B_1\} \in l_1 \cap b_1$
14. B_2; $\{B_2\} \in l_2 \cap b_2$
15. $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$

DISKUSE: Kružnice *k* protne přímku *a* ve dvou bodech – C_1, C_2. My si zvolíme pouze jeden z nich. Daná úloha má jedno řešení, trojúhelník $A_2B_2C_2$ je pak shodný s trojúhelníkem $A_1B_1C_1$. Důležité si bylo uvědomit, že velikost úsečky *PR* je rovna polovině velikost v_b. Tato úsečka *PR* je rovnoběžná s výškou v_b posunutá do paty *P* výšky v_a.

19. Sestrojte kosodélník *ABCD* určený vnitřním úhlem α a oběma úhlopříčkami u_1, u_2.

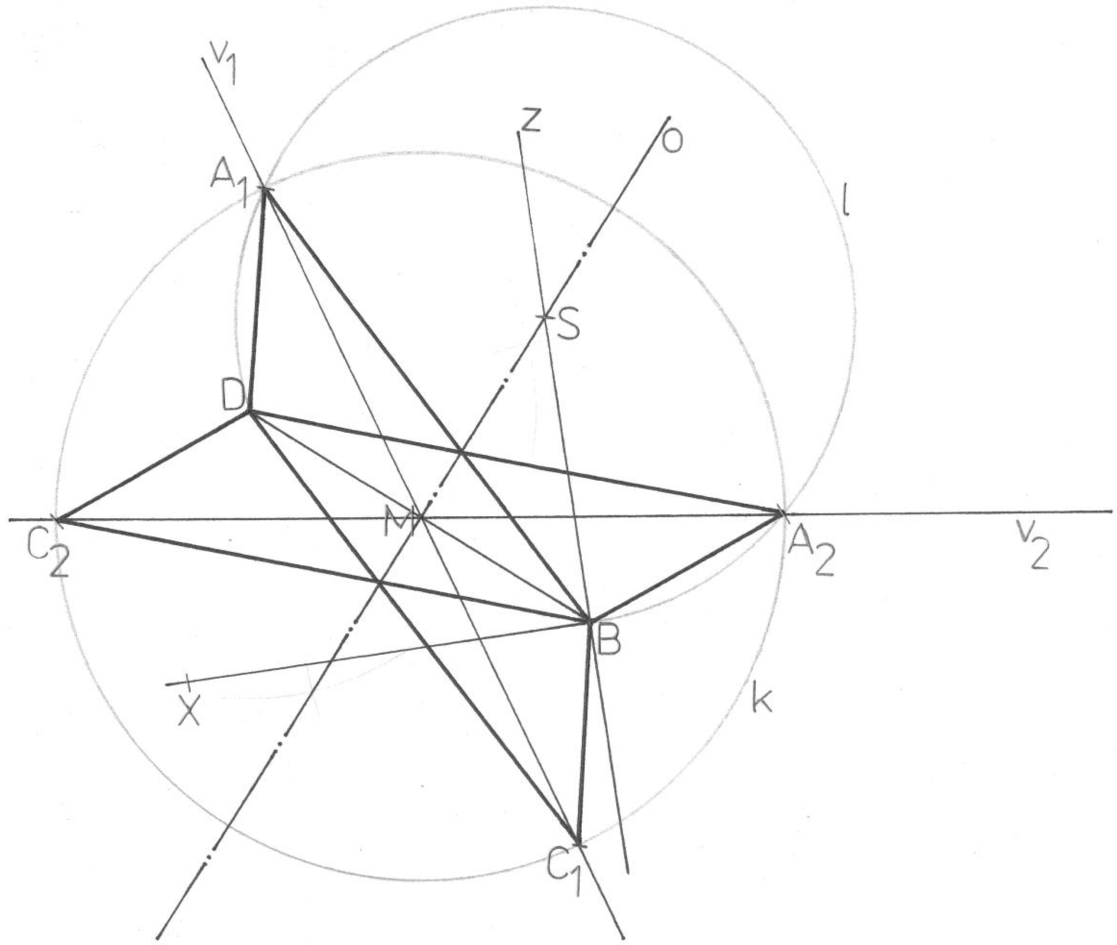


Obrázek 81: Náčrtek úlohy 19

ROZBOR: Předpokládejme, že úloha má alespoň jedno řešení. Je to úloha nepolohová s neznámými všemi vrcholy kosodélníka. Zvolme si trojúhelník *ABD*, pak je tento trojúhelník určen stranou $BD = u_2$ a úhlem α při vrcholu *A*. Sestrojením úsečky *BD* tuto úlohu převedeme na polohovou.

Bod *M* je tedy střed úsečky *BD*, tedy střed úhlopříčky u_2. Současně je tento bod středem úhlopříčky u_1. Množina všech bodů, která má od bodu *M* vzdálenost $\frac{1}{2}u_1$, je kružnice *k* se středem v bodě *M* a poloměrem $\frac{1}{2}u_1$. Na této kružnici *k* pak leží i bod *C*. Množina všech bodů, jež splňují podmínku, že úsečku *BD* je vidět pod zorným úhlem α, jsou dva shodné oblouky. Průnikem těchto množin je bod *A*. Tím dostáváme trojúhelník *ABD*, pak konstrukce bodu *C* je zcela jednoduchá. Ten je totiž průsečíkem kružnice *k* a polopřímky *AM*.

KONSTRUKCE:



Obrázek 82: Konstrukce úlohy 19

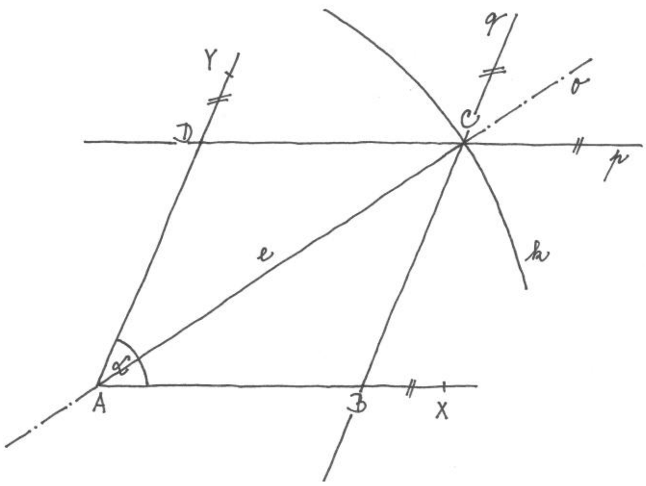
ZÁPIS:

1. zadání: u_1, u_2, α
2. BD; $|BD| = u_2$
3. M; $M \in BD$, $|BM| = |DM|$
4. k; $k(M;\ \frac{1}{2}u_1)$
5. $\angle DBX$; $|\angle DBX| = \alpha$
6. osa o; osa o úsečky BD, $M \in o$
7. $\leftrightarrow z$; $z \perp \rightarrow BX$, $B \in z$
8. S; $\{S\} \in o \cap z$
9. l; $l(S;\ |BS|)$
10. A_1, A_2; $\{A_1\} \in k \cap l$, $\{A_2\} \in k \cap l$
11. $\leftrightarrow v_1$; $A_1 \in v_1$, $M \in v_1$
12. C_1; $\{C_1\} \in v_1 \cap k$

13. $\leftrightarrow v_2$; $A_2 \in v_2$, $M \in v_2$
14. C_2; $\{C_2\} \in k \cap v_2$
15. S_2; $S_2 \in o$, $|S_1M| = |MS_2|$
16. kosodélníky A_1BC_1D, A_2BC_2D

DISKUSE: Protože oblouk l protne kružnici k ve dvou bodech, vzniknou tak dva průsečíky, které označíme podle postupu jako bod A. Pak daná úloha má dvě řešení. Konstrukci druhého oblouku neuvažujeme, protože vzniklé dva kosodélníky by byly shodné již s danými, které za různá řešení nepovažujeme, neboť jsou osově souměrná podle úsečky BD.

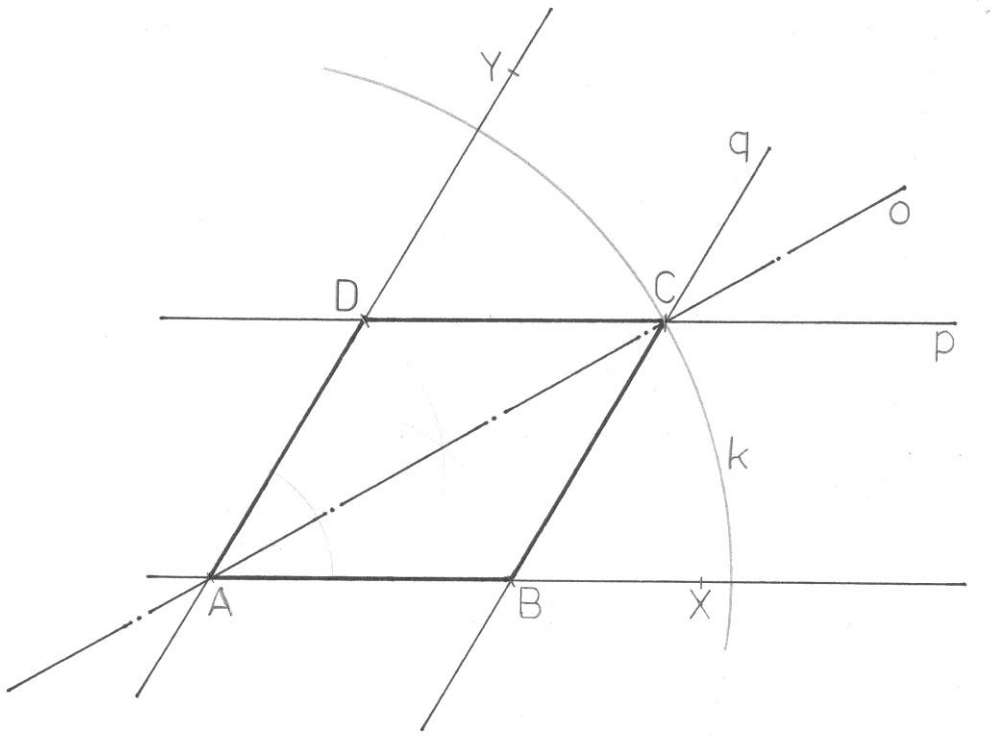
20. Sestrojte kosočtverec *ABCD*, je-li dána jeho úhlopříčka $|AC| = e$ a vnitřní úhel α.



Obrázek 83: Náčrtek úlohy 20

ROZBOR: Uvažujme, že daná úloha má aspoň jedno řešení. Úloha je nepolohová se všemi neznámými vrcholy A, B, C, D. Úlohu převedeme na polohovou, pokud si v rovině zvolíme úhel $\angle XAY$, jehož velikost je rovna vnitřnímu úhlu α. Nejprve sestrojíme polopřímku AX. Pak sestrojíme polopřímku AY tak, aby $|\angle XAY| = \alpha$. Nyní sestrojíme osu o úhlu XAY. Protože úhlopříčky kosočtverce jsou současně osami vnitřních úhlů, musí bod C ležet na ose o ve vzdálenosti e od bodu A. Bod C tedy najdeme jako průsečík o s kružnicí $k(A; e)$. Pak stačí vést bodem C rovnoběžky p, q s polopřímkami AX, AY. Průsečík p s AY je pak bodem D, průsečík q s AX bodem B.

KONSTRUKCE:



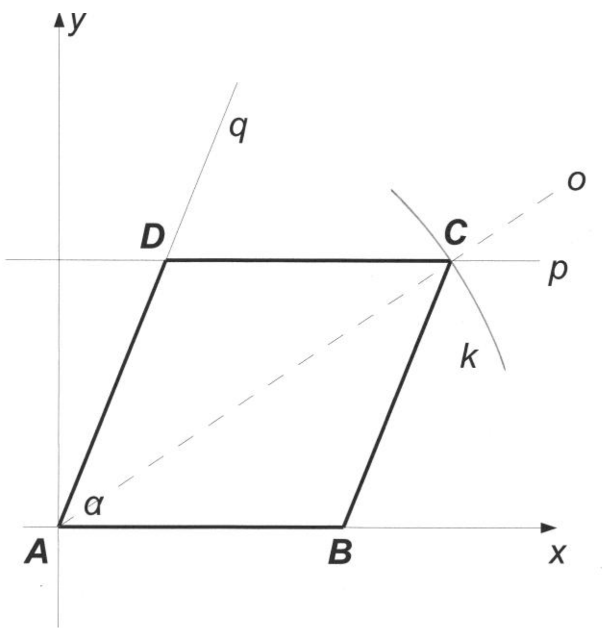
Obrázek 84: Konstrukce úlohy 20

ZÁPIS:

1. zadání: e, α
2. $\angle XAY$; $|\angle XAY| = \alpha$
3. k; $k(A; e)$
4. osa o; osa o je osa úhlu $\angle XAY$
5. C; $\{C\} \in k \cap o$
6. $\leftrightarrow p$; $p \parallel \rightarrow AX$, $C \in p$
7. D; $\{D\} \in p \cap \rightarrow AY$
8. $\leftrightarrow q$; $q \parallel \rightarrow AY$, $C \in q$
9. B; $\{B\} \in q \cap \rightarrow AX$
10. kosočtverec $ABCD$

DISKUSE: Daná úloha má vždy jen jedno řešení, neboť bod D je jediným průsečíkem přímky p a polopřímky AY. Stejně tak i bod B, který je průsečíkem přímky q a polopřímky AX.

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 85: Analytické řešení úlohy 20

Nechť bod C je průsečík kružnice k a osy o. Kružnice k má střed v bodě A, který je v počátku soustavy souřadnic, a poloměr e, což je velikost úhlopříčky AC. Tedy:

$$k : x^2 + y^2 = e^2$$

Přímka o je osou vnitřního úhlu α, napišme si její parametrické vyjádření:

$$x = t \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$y = t \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, t \in R$$

$$\{C\} \in o \cap k$$

$$t^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} + t^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = e^2$$

$$t^2 \cdot \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = e^2$$

$$t = e$$

$$x_C = e \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$y_C = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Dostáváme souřadnice bodu $C = \left[e \cdot \cos\frac{\alpha}{2}; e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right]$. Dále musíme určit vrcholy B a D. Víme, že body C a D leží na přímce p, která je rovnoběžná s osou x, tedy:

$$p : y = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Průsečík přímky p a přímky q je bod D, přímka q má parametrické vyjádření:

$$x = u \cdot \cos\alpha$$

$$y = u \cdot \sin\alpha, u \in R$$

$$\{D\} \in p \cap q$$

$$u \cdot \sin\alpha = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$u = \frac{e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$$

$$x_D = \frac{e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha$$

$$y_D = \frac{e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

Nyní dostáváme souřadnice bodu $D = \left[e \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha; e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right]$. Abychom mohli určit poslední vrchol B, nejprve si určíme vzdálenost $|DC| = a$, protože bod B leží ve stejné vzdálenosti od bodu A.

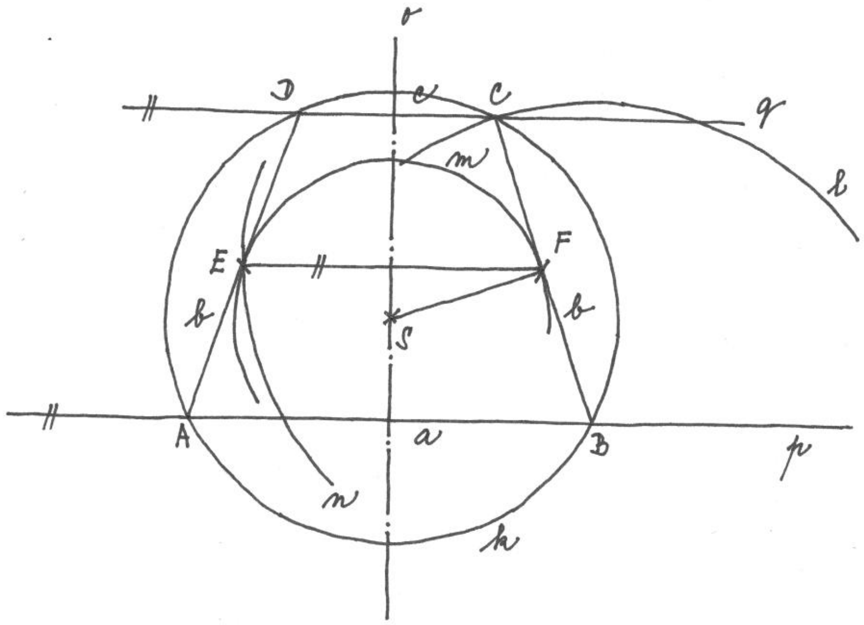
$$a = |DC| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(e \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - e \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha\right)^2 - \left(e \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} =$$

$$= e \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - e \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha = e \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha\right)$$

Chybějící vrchol B má souřadnice $B = \left[e \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\alpha\right); 0\right]$.

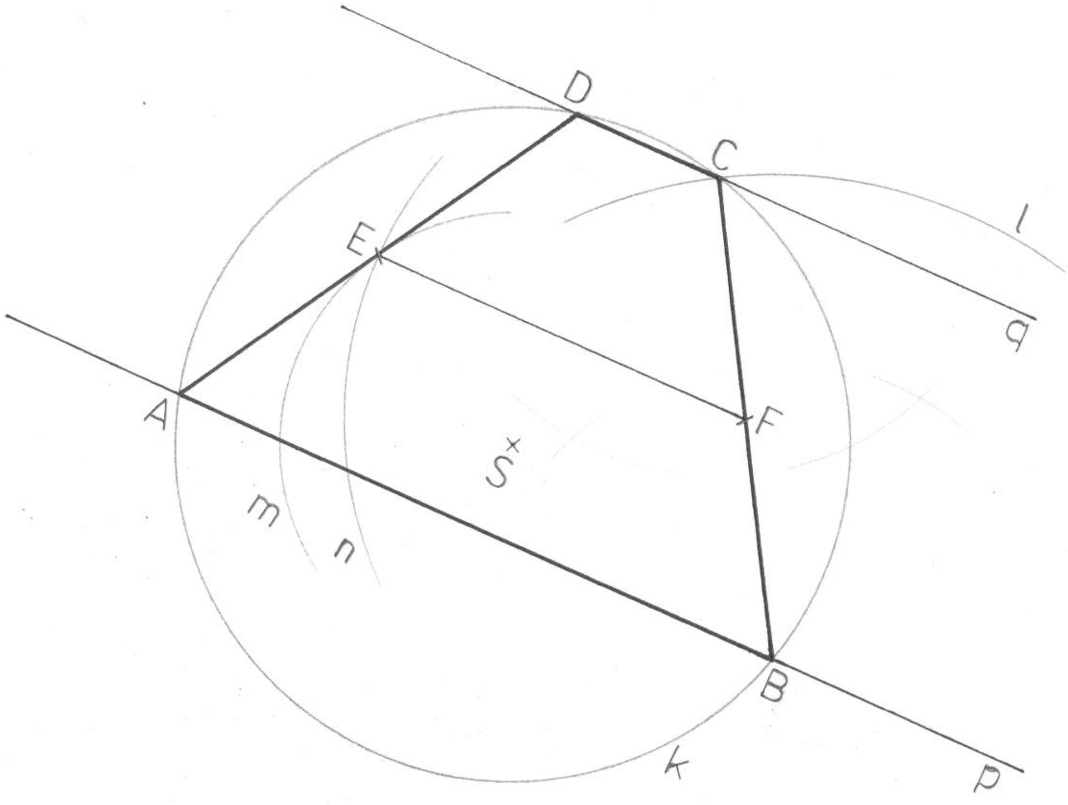
21. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník *ABCD* se základnami *AB, CD*, znáte-li *a + c, b* a *r*, což je poloměr kružnice opsané danému lichoběžníku.



Obrázek 86: Náčrtek úlohy 21

<u>ROZBOR:</u> Předpokládáme, že daná nepolohová úloha má alespoň jedno řešení. Sestrojíme nejprve kružnici *k* lichoběžníku opsanou a zvolíme na ní bod *B*. Bod *C* najdeme jako průsečík kružnic *k* a *l*(*B*; *b*). Tím jsme úlohu převedli na polohovou. Pak zkonstruujeme střední příčku *EF*, kde $E \in AD$, $F \in BC$. Bod *F* tedy najdeme jako střed úsečky *BC*. Protože je rovnoramenný lichoběžník souměrný podle osy úsečky *AB* a střed *S* kružnice jemu opsané na této ose leží, je |*SE*| = |*SF*|. Bod *E* proto leží na kružnici *m*(*S*; |*SF*|). Protože $|EF| = \frac{a+c}{2}$, zároveň bod *E* leží na kružnici $n = \left(F; \frac{a+c}{2}\right)$. Průsečík kružnic *m* a *n* je bod *E*, který spojíme s bodem *F*. Body *B, C* vedeme dvě rovnoběžky *p, q* s úsečkou *EF*. Pak bod *A* je průsečík přímky *p* s kružnicí *k*, bod *D* je průsečík *q* s *k*.

KONSTRUKCE:



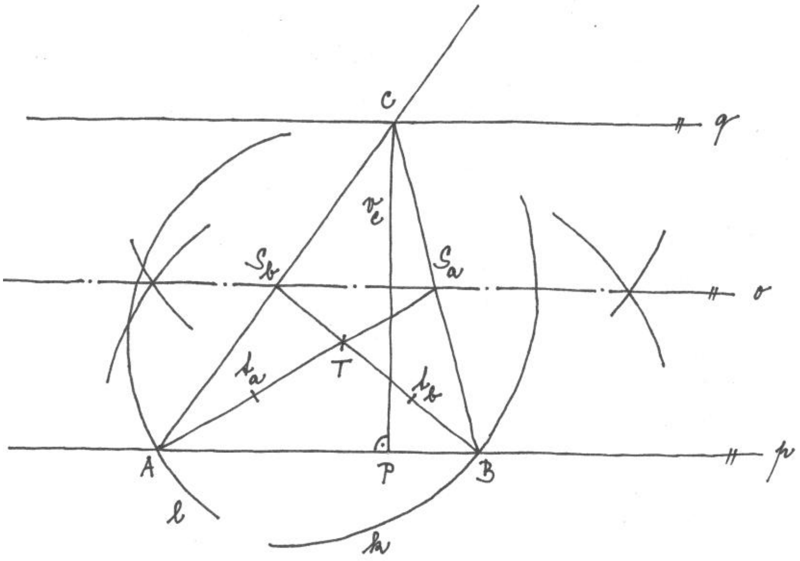
Obrázek 87: Konstrukce úlohy 21

ZÁPIS:

1. zadání: $a + c$, b, r
2. k; $k(S; r)$
3. B; $B \in k$ (libovolný bod B na kružnici k)
4. l; $l(B; b)$
5. C; $\{C\} \in k \cap l$
6. F; $F \in BC$, $|CF| = |FB|$
7. m; $m(S; |SF|)$
8. n; $n\left(F; \dfrac{a+c}{2}\right)$
9. E; $\{E\} \in m \cap n$
10. EF
11. $\leftrightarrow p$; $p \parallel EF$, $B \in p$
12. A; $\{A\} \in k \cap p$
13. $\leftrightarrow q$; $q \parallel EF$, $C \in q$
14. D; $\{D\} \in k \cap q$
15. rovnoramenný lichoběžník $ABCD$

DISKUSE: Úloha je řešitelná, pokud vznikne průsečík E kružnic m a n. Pak daná úloha má jedno řešení.

22. Sestrojte trojúhelník *ABC*, znáte-li t_a, t_b, v_c.

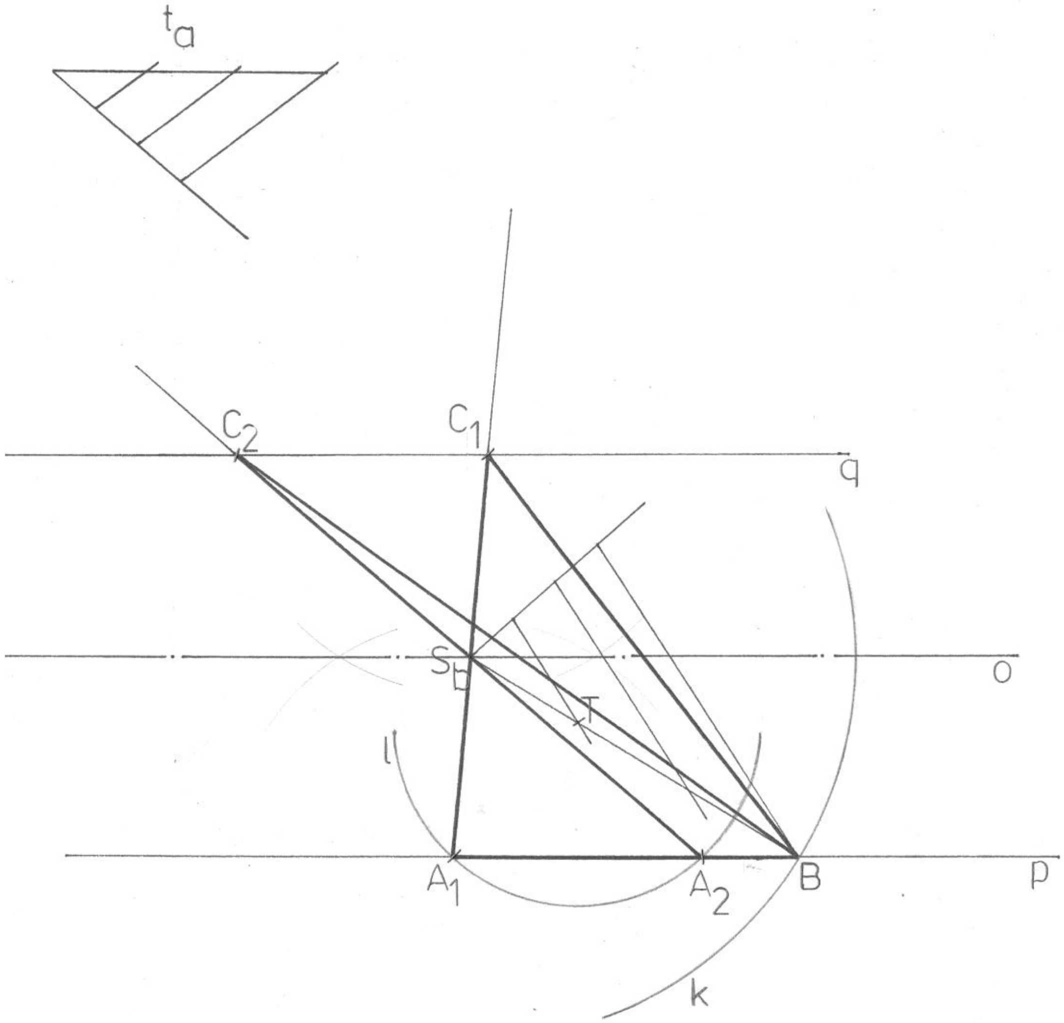


Obrázek 88: Náčrtek úlohy 22

<u>ROZBOR:</u> Uvažujme, že daná nepolohová úloha má alespoň jedno řešení. Sestrojíme rovnoběžky p, q vzdálené od sebe o velikost v_c. Nechť body A, B leží na přímce p, bod C na přímce q. Pak středy stran S_a, S_b leží na ose pásu o jimi omezeného. Na ose o zvolíme libovolný bod S_b, který je středem strany b. Tím nepolohovou úlohu převedeme na polohovou s neznámými třemi vrcholy A, B, C trojúhelníka ABC.

Bod B sestrojíme jako průsečík kružnice $k(S_b; t_b)$ s přímkou p. Protože těžiště dělí těžnici v poměru 1:2, rozdělíme těžnici S_bB bodem T v tomto poměru. Tedy $|BT|:|TS_b| = 2:1$. Bod A pak sestrojíme jako průsečík přímky p s kružnicí $l\left(T; \frac{2}{3}t_a\right)$. A bod C získáme jako průsečík přímky q s polopřímkou AS_b.

KONSTRUKCE:



Obrázek 89: Konstrukce úlohy 22

ZÁPIS:

1. zadání: t_a, t_b, v_c
2. $\leftrightarrow p$, $\leftrightarrow q$; $p \parallel q$, $|pq| = v_c$
3. osa pásu *o*; osa pásu *o* vymezeného přímkami *p*, *q*
4. S_b; $S_b \in o$ (bod S_b je libovolný bod na ose pásu *o*)
5. *k*; $k(S_b; t_b)$
6. *B*; $\{B\} \in k \cap p$
7. BS_b
8. *T*; $T \in S_bB$, $|BT|:|TS_b| = 2:1$
9. *l*; $l\left(T; \frac{2}{3}t_a\right)$
10. A_1, A_2; $\{A_1\} \in l \cap p$, $\{A_2\} \in l \cap p$

11. $\rightarrow A_1S_b$
12. C_1; $\{C_1\} \in q \cap \rightarrow A_1S_b$
13. $\rightarrow A_2S_b$
14. C_2; $\{C_2\} \in q \cap \rightarrow A_2S_b$
15. ΔA_1BC_1, ΔA_2BC_2

<u>DISKUSE:</u> Podmínky řešitelnosti: je-li $t_b < \frac{v_c}{2}$, pak kružnice *k* neprotne přímku *p* a úloha nemá řešení. V opačném případě rozlišujeme další tři možnosti:

a) $t_a < \frac{v_c}{2}$, kružnice *l* se s přímkou *p* neprotne a úloha nemá řešení,

b) $t_a = \frac{v_c}{2}$, přímka *p* je tečnou kružnice *l* a úloha má jedno řešení,

c) $t_a > \frac{v_c}{2}$, jsou tato řešení dvě (náš případ).

Přestože kružnice *k* protne přímku *p* ve dvou bodech B_1, B_2, my vybereme pouze jeden z nich, neboť trojúhelníky vzniklé z druhého bodu *B* jsou shodné trojúhelníky již s danými.

6. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo sestavení sbírky řešených úloh na téma hledání množin bodů daných vlastností geometrickou i analytickou metodou. Řešení úloh užitím souřadnic by ale u některých příkladů bylo velmi složité a komplikované, tak uvádíme pouze konstruktivní řešení.

Tato sbírka měla obsahovat minimálně 50 úloh. Započítávají se do ní i analytické důkazy množin bodů v rovině a v prostoru, další typy úloh tvoří dané úlohy se změnou vstupních podmínek v zadání nebo jiná poloha zadaných útvarů, neboť úlohy jsou zadány obecně, a každý řešitel může útvary umístit v rovině různě. Tato odlišná řešení pak shrnujeme v diskusi každé úlohy.

Jedinou nevýhodou sbírky konstrukčních úloh je, že je omezena pouze na úlohy řešené v rovině, proto by bylo vhodné ji ještě doplnit o úlohy řešené v prostoru.

Tato práce rozšiřuje základní učivo o množinách bodů daných vlastností v rovině a v prostoru. Je tedy určena spíše pro studenty středních škol specializující se na matematiku, neboť analytická geometrie jako spojení algebry a geometrie již vyžaduje hlubší znalosti.

7. POUŽITÁ LITERATURA

[1] FABIÁNOVÁ, Hana. *Konstruktivní geometrie.* 2. vydání. Liberec: TUL, 1992. 158 s. Fakulta strojní. [Skriptum] ISBN 80-7083-086-7.

[2] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 6. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 1991. 608 s. ISBN 80-85849-78-X.

[3] PECINA, Václav – PŘÍVRATSKÁ, Jana. *Geometrie pro techniky: Modul 1.* 1. vydání. Liberec: TUL, 2001. 64 s. [Skriptum] ISBN 80-7083-509-5.

[4] KOMAN, Milan. *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic: kapitola z analytické geometrie v rovině.* 1. vydání. Praha: Mladá fronta, 1966. 100 s. Škola mladých matematiků.

[5] PATÁKOVÁ, Eva. *Webovská interaktivní sbírka geometrických úloh* [online]. c2005 [citováno 30. ledna 2009]. Diplomová práce na Pedagogické fakultě Západočeské univerzity v Plzni. Vedoucí diplomové práce RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D. URL <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/teorie/mbdv.html>.

[6] ZEMÁNEK – KŘÍŽEK. *Planimetrie* [online]. c2007 [citováno 10. října 2009]. URL <http://planimetrie.kvalitně.cz/mocnost_dukaz.html>.

[7] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* 4. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 2007. 206 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-174-1.

[8] BOČEK, Leo – ZHOUF, Jaroslav. *Praxe učitele matematiky – fyziky – informatiky: Máte rádi kružnice?* 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r.o., 1995. 48 s. [Příloha časopisu] ISBN 80-85849-90-9.

[9] KOČANDRLE, Milan – BOČEK, Leo. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie.* 3. vydání. Praha: Prometheus, spol s r.o., 2008. 220 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196-163-5.